

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Zur Begründung der Kristalloptik;*  
*von P. P. Ewald.*

Teil II: Theorie der Reflexion und Brechung.<sup>1)</sup>

§ 1.

1. *Problem.* Der obere Halbraum sei erfüllt von dem Gitter von Dipolen mit den Koordinaten

$$(1) \quad X = 2al; \quad Y = 2bm; \quad Z = 2cn;$$

wo  $l, m, n$  ganze Zahlen sind und  $l, m$  alle positiven und negativen,  $n$  nur positive Werte (einschließlich 0) annimmt.

Auf das Gitter falle von unten eine ebene Welle auf, deren Wellennormale die Richtung  $s_0$  habe:

$$(2) \quad e^{-i n \left( t - \frac{s_0}{c} \right)}$$

ist ihre periodische Funktion (vgl. Fig. 1).

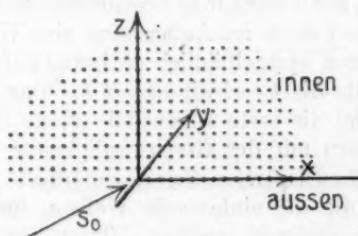


Fig. 1.

Es soll der Schwingungszustand des Gitters und das hierdurch erzeugte optische Feld gefunden werden.

2. *Gang der Rechnung.* Es erschiene wenig aussichtsreich,

1) Fortsetzung der gleichbetitelten Arbeit in Ann. d. Phys. 49. p. 1–38. 1915, im folgenden mit I zitiert.

wollte man versuchen, methodisch das System von Bewegungsgleichungen für alle Dipole, anfangend mit denen des Randes, aufzustellen und zu lösen. Denn die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen erscheinenden Kräfte hängen selbst von sämtlichen Dipolschwingungen ab, und zwar in verwickelter Art, so daß die Berechnung der Kräfte ohne vorherige Kenntnis der Dipolschwingungen gar nicht möglich ist.

Eine andere Methode der Lösung besteht in einem geschickten Ansatz der Dipolschwingungen. Wir können dann die elektrischen Kräfte wirklich summieren und uns überzeugen, ob die dynamischen Bedingungen für die Schwingungsweise des Ansatzes erfüllt sind.

Darum wird hier der *Ansatz* gemacht, daß im Kristall bis zum Rande hin Ebenen gleicher Dipolphase existieren, wie sie nach den Ergebnissen am unbegrenzten Kristall der Fortpflanzung einer ebenen Welle entsprechen. Die Wellennormale dieser Dipolwelle sei  $s$ , ihre Geschwindigkeit  $q$ .

Dann ergibt die Summation der von den Dipolen ausgehenden Kugelwellen nicht wie beim unbegrenzten Kristall allein das Feld einer ebenen Welle, die in der gleichen Art fortschreitet (Geschwindigkeit  $q$ , Richtung  $s$ ), wie die Dipolphase. Sondern über dieses Feld hinaus tritt im Innern eine ebene Welle von der Geschwindigkeit  $c$  auf, deren Fortpflanzungsrichtung  $s_0$  mit  $s$  nach dem Brechungsgesetz verknüpft ist. Außerdem existiert auch im Außenraum eine Welle, und diese ist zu der letzteren spiegelbildlich in bezug auf die Oberfläche und hat ebenfalls die Geschwindigkeit  $c$ . Das äußere ist die reflektierte Welle; die erste Innenwelle ( $q$ ) ist die gebrochene, und die im Innern mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreitende Welle ist die in der Dispersionstheorie geforderte vom Rand ausgehende Welle, die die einfallende Welle  $s_0$  für das Kristallinnere zu kompensieren vermag (kurz innere Randwelle genannt).

Mit diesem Ergebnis ist die Lösung der dynamischen Bedingung für die Dipolschwingungen schon gewonnen. Wenn nämlich die Randwelle und die einfallende Welle sich im Kristall aufheben, so bleibt allein dasselbe Feld, wie beim unbegrenzten Kristall, übrig, und wir haben nur zu sehen, daß die angesetzten Dipolschwingungen mit diesem Feld ver-

träglich sind. Dies ist erfüllt, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit der gebrochenen Welle den richtigen Wert hat, wie in der Dispersionstheorie gezeigt worden ist.

Amplitude und Phase der Randwelle sind durch die Forderung bestimmt, daß die einfallende Welle kompensiert wird. Da alle drei Wellen, die durch die Dipolschwingung entstehen, gesetzmäßig verknüpft sind, wird hierdurch Amplitude und Phase der reflektierten wie der gebrochenen Welle bestimmt. Der Zusammenhang muß der durch die Fresnel'schen Formeln gegebene sein, wenn in richtiger Weise vom mikroskopischen Feld auf das phänomenologische Maxwellsche Feld übergegangen wird.

Es sei gleich bemerkt, daß wir uns in Gedanken auf den Fall eines kubischen, also optisch isotropen, Kristalls beschränken, da hierdurch Komplikationen vermieden werden, die für das Wesentliche der Theorie nur nachteilig sind. Trotzdem unterscheiden wir in den Formeln der Schreibweise halber zunächst die drei Achsenabschnitte  $a, b, c$ , die man, wenn man will, sofort als gleich ansehen kann.

### § 2. Die Summation der Dipolwellen.

Wie im ersten Teil der Dispersionstheorie benutzen wir das Hertz'sche Potential eines Dipoles in der Darstellung I, § 5, Gl. (8) — bis auf den Faktor  $e\alpha \cdot e^{-int}$ :

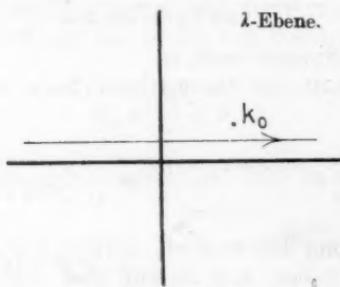


Fig. 2.

$$(3) \frac{e^{ik_0 R}}{R} = -\frac{1}{2\pi^2} \iiint e^{\pm i\lambda(X-x) \pm i\mu(Y-y) \pm i\nu(Z-z)} \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

$(X, Y, Z)$  ist die Koordinate des Dipols,  $(x, y, z)$  die des Auf-

punktes. Die Variablen  $\lambda, \mu, \nu$  laufen parallel zur reellen Achse zwischen dieser und dem (zunächst mit positiv imaginären Teil gedachten) Punkte  $k_0$  hindurch (Fig. 2).

Zu summieren sind die Potentiale

$$(4) \quad a \frac{e^{-i(n\lambda - k_0 R - kS)}}{R};$$

hierbei ist (in der Bezeichnung I § 10)

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} kS = k \cos 1 \cdot X + k \cos 2 \cdot Y + k \cos 3 \cdot Z \\ \quad = \alpha X + \beta Y + \gamma Z. \end{array} \right.$$

Dies entspricht einer längs  $+s$  fortschreitenden Anregung.

Führt man die Summation unter dem Integralzeichen in (3) aus, so zerfällt die dreifache Summe in das Produkt von drei einfachen. Von diesen sind die beiden ersten, deren Indizes  $l$  und  $m$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufen, identisch mit den Summen über  $l$  und  $m$ , die im entsprechenden Problem des unbegrenzten Kristalls auftreten, vgl. Teil I, § 6. Nur unwe sentlich unterscheidet sich unser jetziger Ansatz von dem dort zu Grunde gelegten durch die Vorzeichen von  $\alpha, \beta, \gamma$ , die dementsprechend im Resultate der Summation abzuändern sind. Die Summe über  $l$  liefert hier also zum Integranden den Faktor:

$$(6) \quad -i \frac{\sin \lambda(x+2a) - e^{-2ia\alpha} \sin \lambda x}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha}$$

und analog die Summe nach  $m$ .

Hingegen läuft der Summationsindex  $n$  nur von 0 bis  $\infty$  und wir haben

$$(7) \quad \sum_0^{\infty} e^{2icny - iyz + 2icy \cdot n} = \frac{e^{-iyz}}{1 - e^{2ic(\nu + \gamma)}},$$

damit die Summe konvergiert, muß  $\nu + \gamma$  einen positiven imaginären Teil haben, d. h.  $\nu$  muß über  $-\gamma$  laufen. Bei den vorigen Summen wie auch im unbegrenzten Kristall war zu verlangen, daß  $\lambda$  über  $\alpha$ ,  $\mu$  über  $\beta$  liefe. Die Erfüllbarkeit dieser Forderung, sobald die Summen überhaupt unbedingt konvergent sind, ist in der Dissertation diskutiert und darauf zurückgeführt worden, daß  $k_0$  einen größeren imaginären

Teil 1  
hier  
über

(8)

V  
gehen  
wir d  
grand  
bildern  
von I  
Wellen

D  
mit d  
ganzen  
nutzu  
Funkt  
einen  
beider  
an de

(9)

Durch  
Summ

(10)

und e  
In  
gration

Teil hat als  $k$ . Diese Annahme ist für die Summation auch hier nötig; im Resultat gehen wir ohne weiteres zu reelem  $k, k_0$  über (vgl. Teil I, § 3).

Das Gesamtpotential des „halben Kristalls“ heißt demnach:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi = \frac{1}{2\pi^2} \iiint \frac{\sin \lambda(x+2a) - e^{-2ia\alpha} \sin \lambda x}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha} \\ \cdot \frac{\sin \mu(y+2b) - e^{-2ib\beta} \sin \mu y}{\cos 2b\mu - \cos 2b\beta} \\ \cdot \frac{e^{-ivz}}{1 - e^{2ic(\gamma + \gamma)}} \cdot \frac{d\lambda d\mu dv}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - v^2}. \end{array} \right.$$

Von dieser für alle Werte von  $(x, y, z)$  gültigen Darstellung gehen wir zu einer Darstellung von  $\Pi$  als Summe über, indem wir die drei Integrationen auf Umläufe um die Pole des Integranden in der komplexen Ebene zurückführen und Residuen bilden. Hierbei ergibt sich von selbst eine Unterscheidung von Innen- und Außenraum mit verschiedenen Gruppen von Wellen.

Die beiden ersten Integrationen nach  $\lambda$  und  $\mu$  sind identisch mit denen in der Darstellung I, (5), § 6 für das Potential des ganzen Kristalls. Sie werden behandelt wie dort: unter Benutzung des Umstandes, daß der Integrand eine ungerade Funktion der Variablen ist, wird der Weg der Fig. 2 durch einen unter der reellen Achse laufenden ergänzt. Zwischen beiden Wegen liegt nun die Reihe von Polen des Integranden an den Stellen

$$(9) \quad \lambda_0 = \frac{l\pi}{a} \pm \alpha.$$

Durch Residuenbildung entsteht aus dem Integral nach  $\lambda$  die Summe

$$(10) \quad \frac{2\pi i}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(l\pi - a\alpha)x/a}}{k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \mu^2 - v^2}$$

und entsprechend weiter für die Integration nach  $\mu$ , wie I, § 6.

Im ganzen wird durch diese Umwandlung der Integrationen nach  $\lambda$  und  $\mu$  das Potential des begrenzten Kristalls:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \Pi = & - \frac{1}{2ab} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \int e^{-i(l\pi - a\alpha)x/a - i(m\pi - b\beta)y/b} \\ & \cdot \frac{e^{-ivz}}{1 - e^{2ic(v+\gamma)}} \frac{dv}{k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 - v^2}. \end{aligned} \right.$$

Dies ist eine gemischte Form des Potentials, insofern als zwei Integralzeichen durch Summenzeichen ersetzt sind, während die dritte Integration noch steht. Die Darstellung teilt mit (8) den Vorteil, für den ganzen Raum zu gelten.

Wir gehen nun daran, auch die letzte Integration durch eine Residuensumme zu ersetzen.

Zu diesem Zweck bemerken wir, daß der Integrand zwei Klassen von Polen hat, je nachdem ob der erste oder zweite Nenner Null ist.

$$(12) \text{ a)} \quad 1 - e^{2ic(v+\gamma)} = 0; \quad v = \frac{n\pi}{c} - \gamma, \text{ wo } n \text{ ganzzahlig.}$$

Diese Reihe von Polen entspricht völlig den Polen (9) in der  $\lambda$ - und  $\mu$ -Ebene, an denen die Residuen genommen wurden. Sie liegt auf einer Geraden, die unter der reellen Achse parallel zu dieser läuft und oberhalb des Punktes  $-k_0$  liegt, zwischen dem Integrationsweg für  $v$  und der reellen Achse ([a] in Fig. 3).

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \text{b)} \quad k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 &= v^2, \\ v_{lm} &= +\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2}. \end{aligned} \right.$$

Unter dem Zeichen  $+/\sqrt{\phantom{x}}$  sei der im ersten Quadranten liegende Wurzelwert verstanden. Diese Pole bilden eine Kette, die den vom Punkt  $k_0$  ausgehenden Verzweigungsschnitt der Wurzel umgibt.<sup>1)</sup> Sie werden mit wachsenden  $l$  und  $m$  immer mehr rein imaginär.

e) Auch der andere Wurzelwert, also unter Beibehaltung der obigen Bezeichnung für den Hauptwert, der Wert

1) Wohlverstanden existiert dieser Verzweigungsschnitt noch nicht für die Integration nach  $v$ , da im Nenner nur  $v^2$  vorkommt.

$$\nu = -\nu_{im}$$

bringt den Nenner zum Verschwinden.

Im ganzen ergeben sich also die drei in der Fig. 3 dargestellten Polreihen in der  $\nu$ -Ebene.

Der Integrationsweg für  $\nu$  läuft, wie erwähnt, parallel der reellen Achse zwischen der Polreihe (a) und der Reihe (b) hin-

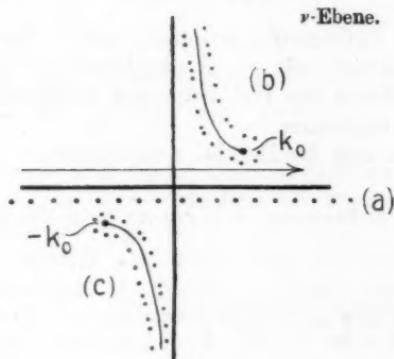


Fig. 3.

durch. Dieser Weg lässt sich entweder nach oben deformieren und zu einer Reihe von Umläufen (in positivem Sinne) um die Polreihe (b) zusammenziehen. Oder er kann nach unten gezogen werden, nämlich dann, wenn der Integrand im Unendlichen der unteren Halbebene exponentiell verschwindet; hierbei bleibt er an den Polreihen (a) und (c) hängen (beides negative Umläufe).

Die Bedingung für die Deformation nach oben ist, daß der Faktor

$$\frac{e^{-iz}}{1 - e^{2ic(\nu + \gamma)}}$$

im Unendlichen der oberen Halbebene verschwindet, also

$$z < 0$$

ist. Dies ist im ganzen Außenraum erfüllt.

Die Deformation nach unten ist andererseits wegen des gleichen Faktors gestattet, wenn nur der Nenner stärker  $\infty$  wird, als der Zähler, d. h. wenn

$$z + 2c > 0$$

ist, also im ganzen Innenraum.

Wie man sieht, gibt es ein Gebiet, den *Rand*,  
 $-2c < z < 0$

in dem beide Deformationen erlaubt sind. Das Randgebiet setzt den eigentlich mit  $z = 0$  abgebrochenen Kristall nach außen hin zunächst fort und vermittelt so den Übergang von Innen- nach Außenraum.

Wir haben nun die Residua auszuführen.

### I. Außenraum, $z$ negativ; Polreihe (b).

Es ist

$$\frac{1}{k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 - \gamma^2} = -\frac{1}{\gamma - \nu_{lm}} \cdot \frac{1}{\gamma + \nu_{lm}}$$

und daher die Summe von Residuen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_a &= \frac{\pi i}{2ab} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-i(l\pi - a\alpha)x/a - i(m\pi - b\beta)y/b - i\nu_{lm}z} \\ &\quad \cdot \frac{1}{1 - e^{2i\epsilon(\nu_{lm} + \gamma)}} \cdot \frac{1}{\nu_{lm}}. \end{aligned} \right.$$

Dies ist also das im Außenraum gültige Potential  $\Pi_a$ . Es ist eine Doppelsumme, deren einzelne Glieder die Form einer ebenen Welle zu haben scheinen. Tatsächlich trifft dies bei den optischen Größenverhältnissen, d. h. unter Beachtung, daß  $k_0, a, \beta, \gamma$  klein gegen  $1/a, 1/b, 1/c$  sind, nur für das Glied 00 zu, während alle andern Glieder als inhomogene Wellen zu bezeichnen sind, da für sie  $\nu_{lm}$  positiv imaginär ist (vgl. jedoch § 7).

### II. Innenraum, $z + 2c$ positiv; Polreihen (a) und (c).

Das Residuum an einem Pol der Reihe (a) wird durch Entwicklung des Integranden in der Umgebung des Pols gefunden; dort ist

und in

Wegen  
Faktor  
nennen

**I**  
(15)

Dies ist  
im Vor  
unbegre  
Sel

die Dop  
Vorzeic  
Umlauf

**I**  
(16)

Das ü  
ebenso

Da  
beiden

(17)

Es  
hier gle  
stellung  
auf die  
gration  
beide L

Zu

(17a)

$$\nu = \nu_n = \frac{n\pi - c\gamma}{c}$$

und in der Nähe

$$\frac{e^{-i\nu z}}{1 - e^{2ic(\nu + \gamma)}} = \frac{e^{-i\nu_n z}}{-2ic(\nu - \nu_n) + \dots}$$

Wegen des negativen Umlaufs kommt das Residuum mit dem Faktor  $-2\pi i$  in Anrechnung. Das Potential wird — wir nennen es  $\Pi_q$ :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_q = -\frac{\pi}{2abc} \\ \sum_l \sum_m \sum_n \frac{e^{-i(l\pi - a\alpha)x/a - i(m\pi - b\beta)y/b - i(n\pi - c\gamma)z/c}}{k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi - c\gamma}{c}\right)^2} \end{array} \right.$$

Dies ist — bis auf den schon öfters erwähnten Unterschied im Vorzeichen von  $a, \beta, \gamma$  — identisch mit dem Potential des unbegrenzten Kristalls; vgl. Teil I, (...).

Schließlich kommt als zweiter Teil des Innenpotentials die Doppelsumme über die Polreihe ( $c$ ) hinzu, die bis auf das Vorzeichen von  $\nu_{lm}$  und ein weiteres  $(-1)$  wegen des negativen Umlaufs mit der Residuensumme über die Pole ( $b$ ) gleich ist:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_c = \frac{i\pi}{2ab} \\ \sum_l \sum_m e^{-i(l\pi - a\alpha)x/a - i(m\pi - b\beta)y/b + i\nu_{lm}z} \frac{1}{1 - e^{-2ic(\nu_{lm} - \gamma)}} \cdot \frac{1}{\nu_{lm}} \end{array} \right.$$

Das über den Charakter der Summe  $\Pi_a$  Gesagte gilt ebenso für  $\Pi_c$ .

Das gesamte Innenpotential setzt sich additiv aus den beiden Bestandteilen zusammen:

$$(17) \quad \Pi_i = \Pi_q + \Pi_c.$$

### III. Das Randgebiet. $z$ zwischen 0 und $-2c$ .

Es sei erlaubt, um mit den Summen vertrauter zu werden, hier gleich das Randgebiet zu betrachten, in dem beide Darstellungen,  $\Pi_a$  und  $\Pi_c$ , gelten sollen. Es läßt sich leicht, ohne auf die Integraldarstellung und die Deformation der Integrationswege zurückzugreifen, an den Reihen zeigen, daß beide Darstellungen innerhalb der Randzone identisch sind.

Zu diesem Zweck behaupten wir

$$(17a) \quad \Pi_a - \Pi_c = \Pi_q,$$

und haben zu zeigen, daß die dreifache Summe, die rechts steht, gleich der Differenz der Doppelsummen ist.

Man erkennt leicht, daß die auf der rechten Seite auftretende dritte Summation nach  $n$  dadurch entsteht, daß in jedem Glied der linksseitigen Doppelsumme die  $\nu_{lm}$  enthaltenen Teile auf Fouriersche Weise entwickelt sind. Durch Vergleich von (14), (15), (16) ergibt sich, daß sein muß — für  $z$  zwischen 0 und  $-2c$ :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\nu_{lm}} \left( \frac{e^{-i\nu_{lm}z}}{1 - e^{2ic(\nu_{lm} + \gamma)}} - \frac{e^{+i\nu_{lm}z}}{1 - e^{-2ic(\nu_{lm} - \gamma)}} \right) \\ & = \frac{i}{c} \sum_{(n)} \frac{e^{-in\pi z/c + iyz}}{\nu_{lm}^2 - (n\pi/c - \gamma)^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Richtigkeit dieser Beziehung ergibt sich am einfachsten, indem man sich die Summe auf der rechten Seite wie folgt herstellt. Man geht aus von der Entwicklung von  $e^{-iz}$  im Intervall  $0 \dots -2c$ , welche lautet:

$$(19) \quad e^{-iz} = \frac{1}{c} \sum_{-\infty}^{+\infty} (n) e^{-in\pi z/c} \frac{\sin \nu c \cdot e^{i\nu c}}{\nu - n\pi/c}.$$

Indem man den Faktor  $\sin \nu c \cdot e^{i\nu c}$  nach links schafft, hat man eine Entwicklung mit dem Koeffizienten

$$A_n = \frac{1}{\nu_{lm} - n\pi/c}.$$

Der Koeffizient der gesuchten Entwicklung ist nun

$$B_n = \frac{1}{\nu_{lm}^2 - (n\pi/c - \gamma)^2} = \frac{1}{2\nu_{lm}} \left\{ \frac{1}{\nu + \gamma - n\pi/c} - \frac{1}{-\nu + \gamma - n\pi/c} \right\}.$$

Man erhält hiernach den Wert der Summe (18) als Differenz zweier Exponentialfunktionen:

$$\sum_{(n)} = \frac{e^{i\gamma z}}{2\nu} \cdot c \left\{ \frac{e^{-i(\nu + \gamma)(z+c)}}{\sin (\nu + \gamma)c} - \frac{e^{-i(-\nu + \gamma)(z+c)}}{\sin (-\nu + \gamma)c} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung, versehen mit dem Faktor  $i/c$ , ist nach einfachen Umformungen genau gleich der linken Seite von (18); hierdurch ist die Gültigkeit beider Entwicklungen (14) bzw. (15) + (16) im Randgebiet direkt bewiesen.

### § 3. Vernachlässigungen für optische Wellen.

Bevor wir zur Befriedigung der dynamischen Bedingungen an jedem Dipol mittels der einfallenden optischen Welle

schreit  
die Po  
sind zv

1.  
der Gi  
von de  
daß k  
im Ve

2.  
bisherig  
im Fal  
da die V  
1 Å-E  
Dieser

Da  
genüge  
steht,  
in glei  
Der an  
scher  
Elemen  
Feld is  
daß die  
teiles h  
Faktor  
Potenti

(20)

Wie d  
hängt,

Fü  
rakter

(21)

schreiten, werden wir eine Übersicht über die Art der durch die Potentiale dargestellten Felder zu gewinnen suchen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Im Fall optischer Wellen ist  $a/\lambda$ , d. i. der halbe Abstand der Gitterpunkte gemessen in Wellenlängen, eine kleine Zahl von der Größenordnung  $1/100$ . In unsren Formeln heißt dies, daß  $k = n/q = 2\pi/\lambda$  und hiermit auch  $k_0, a, \beta, \gamma$  klein sind im Vergleich zu  $1/a$ .

2. Durchsetzt ein Röntgenstrahl das Gitter, so gilt die bisherige strenge Rechnung auf Grund des Ansatzes (4) wie im Fall (1). Diesmal ist aber  $a k$  von der Größenordnung 10, da die Wellenlänge der gewöhnlichen Röntgenstrahlen (höchstens 1 Å.-E.) über 1000 mal kleiner als die der Lichtwellen ist. Dieser Fall wird in § 7 behandelt werden.

### Optische Wellen.

#### a) Die Innenwelle $\Pi_q$ .

Das Potential  $\Pi_q$  ist schon aus dem Teil I bekannt. Es genüge hier daran zu erinnern, daß es aus zwei Faktoren besteht, deren einer die Form  $e^{ikz}$  einer ebenen Welle hat, die in gleicher Art wie die Dipolphase das Gitter überstreicht. Der andere Faktor ist eine dreifache Summe, die in Fourierscher Weise eine Funktion darstellt, die sich von einem Elementarparallelepiped zum andern wiederholt. Das optische Feld ist durch Mittelwertbildung offenbar derart zu definieren, daß die Schwankungen dieses schnell veränderlichen Bestandteiles herausfallen; integriert man zu diesem Zweck den zweiten Faktor über ein Parallelepiped, so erhält man ein gemitteltes Potential

$$(20) \quad \overline{\Pi}_q = \overline{\Pi}_q^{000} = -\frac{\pi}{2abc} e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \cdot \frac{1}{k_0^2 - k^2}.$$

Wie dies mit den makroskopischen Feldstärken zusammenhängt, vgl. § 5.

#### b) Die Innenwelle $\Pi_e$ .

Für die Bestandteile dieser Doppelsumme ist der Charakter von

$$(21) \quad v_{lm} = + \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2}$$

bestimmend. Im optischen Falle kann allein das Glied

$$(22) \quad v_{00} = \sqrt{k_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}$$

reell sein, alle anderen Glieder sind sicherlich imaginär. Alle Summenglieder außer  $l = m = 0$  stellen dann inhomogene Wellen dar, deren Amplitudenabfall gemäß dem Faktor

$$e^{i r_{lm} z}$$

in der  $z$ -Richtung erfolgt. Je höher die Indizes, um so schneller ist der Abfall. Bei

$$(22a) \quad v_{01} = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - (\pi/b - \beta)^2} \sim i \pi/b$$

heißt der Faktor

$$e^{-\pi z/b}.$$

Nehmen wir den Fall eines kubischen Gitters, wo  $a = b = c$  ist, so heißt dies, daß die Amplitude der Welle bei der ersten Dipolschicht  $z = 0$  nur noch  $e^{-2z} = 0,0018$  ihrer Amplitude am Anfang  $z = -2c$  des Randgebietes hat. Ebenso groß ist das Verhältnis der Amplituden der inhomogenen Welle in der ersten und zweiten Dipolschicht.

Die schnelle Abnahme der inhomogenen Wellen nach dem Innern hin läßt vermuten, daß sie für den wesentlichen Vorgang bei der Reflexion und Brechung belanglos sind. Sie vermögen den dynamischen Zustand des Gitters selbst in der letzten Schicht von Atomen nicht merklich zu beeinflussen. Zu der Abdämpfung nach innen kommt weiter, daß die Amplitude der inhomogenen Wellen überhaupt von ganz anderer Größenordnung ist als diejenige der homogenen Wellen, speziell der homogenen Wellen 00 des Potentials  $\Pi_e$ . Der Faktor  $1/v_{lm}$  in (16) ist ja wegen (22) beim Glied 00 von der Größenordnung  $1/k$ , bei den inhomogenen Wellen dagegen von der Größe 1 (22a).

Nach all diesem ist es erlaubt, von den inhomogenen Wellen für das ganze Innere einschließlich der Randatome abzusehen und bei der dynamischen Bedingung, die an jedem Atom befriedigt werden muß, allein das Potential  $\Pi_e$  und das Glied 00 vom Potential  $\Pi_e$  zu berücksichtigen.

Dies letztere Glied haben wir uns noch kurz anzusehen. Es ist

(22)

wenn  $v$   
Winkel  
hierzu k

Das

(23)  $\Pi_e$

Die We  
brochen  
Die Pha

als Lieh  
der Win  
zur geb  
hätte.

Im  
Ordnung

zu setze

(23a)

Das  
sprochen  
das Gli  
und ma

Das

(24)  $\Pi_e$

$$(22') \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{00} = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{k_0^2 - k^2 + \gamma^2} \\ \qquad \qquad \qquad = k_0 \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 3} \\ \qquad \qquad \qquad = k_0 \cos 3_0 \end{array} \right.$$

wenn  $\nu = k/k_0$  der Brechungsindex ist und (3) bzw. ( $3_0$ ) die Winkel sind, die gebrochener bzw. nach dem Brechungsgesetz hierzu konstruierter einfallender Strahl mit der  $z$ -Achse bilden:

$$\left( \frac{\sin 3_0}{\sin 3} = \nu \right).$$

Das von  $\Pi_e$  allein übrige Glied heißt im ganzen

$$(23) \quad \Pi_e^{00} = \frac{i\pi}{2ab} e^{i\alpha x + i\beta y + ik_0 \cos 3_0 z} \frac{1}{1 - e^{-2ic(k_0 \cos 3_0 - \gamma)}} \cdot \frac{1}{k_0 \cos 3_0}.$$

Die Wellennormale liegt also in der Ebene, die von der gebrochenen Welle und der  $z$ -Achse gebildet wird (Einfallsebene). Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist durch

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + v_{00}^2} = k_0 \quad [\text{siehe (22')}]$$

als Lichtgeschwindigkeit im Vakuum erkannt. Schließlich ist der Winkel gegen die  $z$ -Achse der gleiche Winkel ( $3_0$ ), den die zur gebrochenen Welle hinzukonstruierte einfallende Welle hätte.

Im Sinne der Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in  $c k_0$  ist anstatt des Faktors

$$\frac{1}{1 - e^{-2ic(k_0 \cos 3_0 - \gamma)}}$$

zu setzen

$$(23a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2ic} \frac{1}{k_0 \cos 3_0 - \gamma} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{2ic} \frac{1}{k_0 \cos 3_0 - k \cos 3} = \frac{1}{2ic} \cdot \frac{1}{k_0} \frac{\sin 3}{\sin(3 - 3_0)} \end{array} \right.$$

### c) Die Außenwellen $\Pi_a$ .

Das Potential (14) des Außenraumes ist dem eben besprochenen Potential  $\Pi_e$  sehr ähnlich. Auch hier übertragt das Glied 00 an Amplitude und Bedeutung die anderen Glieder und man kann sich auf das eine Glied beschränken.

Das Glied heißt hier

$$(24) \quad \Pi_a^{00} = \frac{i\pi}{2ab} e^{i\alpha x + i\beta y - ik_0 \cos 3_0 z} \frac{1}{1 - e^{2ic(k_0 \cos 3_0 + \gamma)}} \cdot \frac{1}{k_0 \cos 3_0}.$$

Die Welle verläuft also wieder in der „Einfallsebene“, sie ist das Spiegelbild der Welle  $\Pi_e$  in bezug auf die Oberfläche und hat deshalb die Richtung der zur gebrochenen hinzukonstruierten reflektierten Welle. Ihre Amplitude ist verschieden von der der inneren Randwelle  $\Pi_e$ , da hier der vorletzte Faktor durch

$$(24a) \quad -\frac{1}{2ie(k_0 \cos 3_0 + \gamma)} = -\frac{1}{2ie} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot \frac{\sin 3}{\sin(3 + 3_0)}$$

zu ersetzen ist.

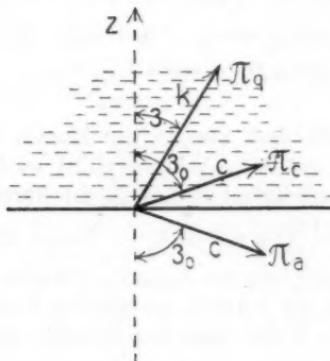


Fig. 4.

Fig. 4 zeigt die drei Wellen mit ihren Fortschreitungsrichtungen und Geschwindigkeiten.

#### § 4. Befriedigung der dynamischen Bedingung, Fresnel'sche Formeln.

Der Theorie des unbegrenzten Kristalls fiel die Aufgabe zu, zu zeigen, daß der Ansatz von Ebenen gleicher Dipolphase dynamisch möglich ist. Als Bedingung ergab sich, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Dipolphase und damit der von ihr erzeugten Lichtwelle einen bestimmten durch die Dispersionsformel gegebenen Wert haben muß.

Bei dem begrenzten Kristall geht das einen Dipol anregende Feld aus zwei Potentialen hervor, den Potentialen  $\Pi_e$  und  $\Pi_o$ , von denen aber noch abzuziehen ist der Teil, der von dem zu erregenden Dipol selbst herstammt. Da  $\Pi_o$  überall, selbst für die äußersten Randatome, identisch ist mit dem Potential im unbegrenzten Kristall, so entsteht an allen Dipolen

ist  
und  
ten  
der  
rach  
das gleiche erregende Feld und damit dieselbe Schwingungsart wie im unbegrenzten Kristall, sobald dafür gesorgt wird, daß  $\Pi_e$  fortfällt. Als dynamische Bedingung für die Möglichkeit des Ansatzes von Ebenen gleicher Dipolphase behalten wir hier wie dort nur: man wähle die richtige Phasengeschwindigkeit  $q$ . Da das Potential  $\Pi_e$  sich bei optischen Wellen auf eine einzige homogene Welle reduziert, die geometrisch mit der ins Innere des Kristalls fortgesetzten einfallenden Welle zusammenfällt, so läßt sich die Amplitude und Phase der Dipole leicht so einrichten, daß  $\Pi_e$  und die einfallende Welle sich aufheben.

Um den Übergang von den Potentialen zu den Feldstärken zu bewerkstelligen, nehmen wir einige Überlegungen vorweg, die erst im § 5 systematisch durchgeführt werden sollen. Dabei beschränken wir uns hier auf den Fall eines kubischen Kristalls ( $a = b = c$ , Wellengeschwindigkeit in allen Richtungen gleich groß, Dipolschwingung senkrecht zur Fortschrittsrichtung  $s$ ; vgl. Dispersionstheorie). Die Potentiale haben, vollständig geschrieben, sämtlich die Form

$$ea e^{inx},$$

wo  $x$  entweder  $k$  oder  $k_0$  ist, und  $ea = p$  das Moment der Dipole bedeutet. Nach Teil I, § 2, Gl. (4) ist die Feldstärke durch Bildung von rotrot aus dem Potential zu gewinnen. Wir behaupten hier und beweisen in § 5, daß diese Operation im allgemeinen Fall die dielektrische Verschiebung  $\mathfrak{D}$  liefert und nur im Fall des leeren Raumes,  $\epsilon = 1$ , ebenfalls die elektrische Feldstärke  $E$ , welche dann mit  $\mathfrak{D}$  gleich groß ist.

Nehmen wir als Ausbreitungsrichtung die  $x$ -Achse, so ergibt sich aus dem obigen Potential

$$\mathfrak{D}_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_x e^{inx} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_x e^{inx} = 0,$$

$$\mathfrak{D}_y = -\frac{\partial}{\partial y} a_x \frac{\partial}{\partial x} e^{inx} - a_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{inx} = x^2 a_y e^{inx},$$

$$\mathfrak{D}_z = -\frac{\partial}{\partial z} a_x \frac{\partial}{\partial x} e^{inx} - a_z \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{inx} = x^2 a_z e^{inx}.$$

Das heißt allgemeiner ausgesprochen: beim Übergang zum Feld liefert nur die auf der Wellennormale senkrechte Komponente der Amplitude einen Beitrag. Das Feld des Vektors  $\mathfrak{D}$  unterscheidet sich von dem Feld des transversalen Teils des Vektorpotentials dadurch, daß zur Amplitude der Faktor  $x^2$

( $= k^2$  bzw.  $k_0^2$ ) hinzutritt. Wir haben also die zwei Fälle zu unterscheiden, daß die Dipolschwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden, oder in der Einfallsebene. Im ersten Fall kommt die volle Amplitude  $a$  für alle drei Wellen zur Geltung, im zweiten Fall wird die Amplitude durch einen Cosinusfaktor geschwächt.

Aus den Potentialen (20), (23), (24) erhalten wir hiernach folgende Feldstärken für die gebrochene, die Randwelle und die reflektierte Welle, wenn die Schwingung in der Einfallsebene stattfindet:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. Gebrochene Welle:} \\ \mathfrak{D}_q = -a \frac{4\pi}{v} \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} e^{ikz}; \\ \\ \text{II. Randwelle:} \\ \mathfrak{D}_c = a \cos(3 - 3_0) \frac{2\pi}{v} \frac{\sin 3}{\sin(3 - 3_0)} \cdot \frac{1}{\cos 3_0} e^{ik_0 s'}; \\ \\ \text{III. Reflektierte Welle:} \\ \mathfrak{D}_a = a \cos(3 + 3_0) \frac{2\pi}{v} \frac{\sin 3}{\sin 3 + 3_0} \cdot \frac{1}{\cos 3_0} e^{ik_0 s''}. \end{array} \right.$$

Hierbei ist  $v = 8a^3$  das Volumen eines Elementarkubus. Bei Schwingung senkrecht zur Einfallsebene fällt der erste Cosinusfaktor bei  $\mathfrak{D}_c$  und  $\mathfrak{D}_a$  fort.

Wir setzen nun die einfallende Welle  $\mathfrak{D}_e$  zu der Randwelle in die Beziehung  $\mathfrak{D}_e = -\mathfrak{D}_c$ .

Hierdurch wird die Amplitude der gebrochenen Welle für den Fall der Schwingung in der Einfallsebene, gemessen durch die Amplitude der einfallenden Welle:

$$(26a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|\mathfrak{D}_q|}{|\mathfrak{D}_c|} = 2 \cdot \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} \frac{\operatorname{tg}(3 - 3_0)}{\sin 3} \cdot \cos 3_0 \\ = 2 \frac{v^2}{1 - v^2} \frac{\operatorname{tg}(3 - 3_0)}{\sin 3} \cdot \cos 3_0 \\ = 2 \cdot v^2 \cdot \cos 3_0 \frac{\sin 3}{\sin(3 + 3_0) \cdot \cos(3 - 3_0)} \text{ 1) } \end{array} \right.$$

1) Bei den Umrechnungen sind die Formeln nützlich:

$$\begin{aligned} 1 - v^2 &= \cos^2 3_0 - v^2 \cos^2 3 \\ &= \frac{\sin(3 + 3_0) \sin(3 - 3_0)}{\sin^2 3}, \end{aligned}$$

Ferner 
$$\frac{\cos 3_0 - v \cos 3}{\cos 3_0 + v \cos 3} = \frac{\sin(3 - 3_0)}{\sin(3 + 3_0)}.$$

und die Amplitude der reflektierten Welle

$$(26b) \quad \frac{|\mathfrak{D}_a|}{|\mathfrak{D}_e|} = - \frac{\cos(3 + 3_0)}{\cos(3 - 3_0)} \frac{\sin(3 - 3_0)}{\sin(3 + 3_0)} = \frac{\operatorname{tg}(3_0 - 3)}{\operatorname{tg}(3 + 3_0)}.$$

Schließlich wird für den Fall, daß die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind, die gebrochene Welle mit dem Faktor  $\cos(3 - 3_0)$  die reflektierte mit

$$\frac{\cos(3 - 3_0)}{\cos(3 + 3_0)}$$

multipliziert. Die Formeln für Schwingung senkrecht zur Einfallsebene sind also:

$$(27a) \quad \frac{\mathfrak{D}_a}{\mathfrak{D}_e} = 2 \cdot \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} \frac{\sin(3 - 3_0)}{\sin 3} \cdot \cos 3_0 = 2\nu^2 \cos 3_0 \frac{\sin 3}{\sin(3 + 3_0)}$$

$$(27b) \quad \frac{\mathfrak{D}_a}{\mathfrak{D}_e} = \frac{\sin(3 - 3_0)}{\sin(3 + 3_0)}.$$

Diese Formeln stimmen überein mit den Fresnelschen Formeln für den Vektor  $\mathfrak{D}$  der dielektrischen Verschiebung (vgl. etwa die Formeln für  $\mathfrak{E}$  in Drudes Lehrb. d. Optik, 1. Aufl. p. 258-262).

Die vorstehend gegebene streng innerhalb des Rahmens der Elektronentheorie verlaufende Behandlung des Problems der Reflexion und Brechung bestätigt die Erwartungen, die vom Standpunkte der Dispersionstheorie aus an den Einfluß des Randes gestellt wurden. Das Auftreten der inneren Randwelle ist der Punkt, wo die elektronentheoretische Rechnung tiefer in das Problem blicken läßt, als die Ableitung auf Grund von Grenzbedingungen nach Maxwell. Selbst wenn diese Grenzbedingungen aus den Vorstellungen der Elektronentheorie begründet würden, wäre die sehr charakteristische Eigenschaft des Randes in den Grenzbedingungen versteckt und es trüte nicht so deutlich wie hier hervor, warum die Elektronen in der geschilderten Weise schwingen müssen, um mit dem gesamten erregenden Feld zu harmonieren.

Der Unterschied der Fresnelschen Formeln für die beiden Polarisationsrichtungen wird hier besonders anschaulich als Komponentenbildung an der Dipolamplitude erklärt. Ein spezieller Fall hiervon ist die bekannte Erklärung des Brewsterschen Winkels, als desjenigen Einfallswinkels, bei dem die Schwingungen der Elektronen im Körper (soweit sie in der Einfallsebene stattfinden) die Richtung des reflektierten Strahls haben und daher für diesen optisch unwirksam sind.

§ 5. Betrachtungen über den Übergang vom mikroskopischen Feld zu den Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  der Maxwell'schen Theorie.

Die Fresnelschen Formeln des vorigen Paragraphen entstanden, indem das Potential  $\Pi$ , ersetzt wurde durch einen Mittelwert über ein Elementarparallelepiped; indem ferner an diesem Mittelwert die Operation rotrot ausgeführt und behauptet wurde, auf diese Art sei aus dem genauen mikroskopischen Feld das makroskopische Feld des Vektors  $\mathfrak{D}$  zu erhalten.

Zur Begründung dieser Vorschrift ist folgendes zu überlegen.

Das Vektorpotential war gewählt worden, um das Feld eines Dipols bequem darzustellen. Hierbei, insbesondere bei der Vorschrift, daß  $\mathfrak{E} = \text{rotrot } \mathfrak{P}$  sei (Teil I, § 2, (4)) war vorausgesetzt, daß das Feld sich im leeren Raum ( $\varepsilon = 1$ ) ausbreite. Das Potential  $e^{ik_0 R}/R$  erfüllte die Differentialgleichung für den leeren Raum

(a)

$$\Delta \mathfrak{P} + k_n^2 \mathfrak{P} = 0.$$

Nach dieser Vorschrift wurde auch in Teil I, § 7 das erregende Feld aus dem erregenden Potential bestimmt.

Mitteln wir aber das Gesamtpotential  $a\Pi$ , um die schnellen Schwankungen auszugleichen, so finden wir, daß das optische Potential  $\tilde{\mathfrak{P}}$  nunmehr die Gleichung

(b)

$$\Delta \tilde{\mathfrak{P}} + k^2 \tilde{\mathfrak{P}} = 0$$

erfüllt.  $k^2$  ist die bei der Ausbreitung in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  ( $= \gamma^2$ ) auftretende Konstante. Erfüllt ein Vektorpotential aber diese Gleichung, so liefert die Operation rotrot daraus den Vektor  $\mathfrak{D}$  der dielektrischen Verschiebung.

Denn das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  für einen Körper mit der dielektrischen Konstante  $\varepsilon$  wird ja eingeführt, um die Maxwell'schen Gleichungen

$$(1) \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\mathfrak{H}} = - \text{rot } \mathfrak{E}; \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0 \quad (3) \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \quad (5)$$

$$(2) \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\mathfrak{D}} = \text{rot } \mathfrak{H}; \quad \text{div } \mathfrak{D} = 0 \quad (4)$$

zu befriedigen. Man bestimmt wegen (3)  $\text{rot } \mathfrak{A}$  derart, daß

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H} \quad (d)$$

ist; die zweite Gleichung liefert dann

$$\mathfrak{D} = \text{rotrot } \mathfrak{A},$$

wodurch auch (4) erfüllt ist.

Verfügt man nun

$$\text{div } \mathfrak{A} = 0,$$

so fordert Gleichung (1) in Verbindung mit (5)

$$(b) \quad \Delta \mathfrak{A} - \frac{\epsilon}{c} \mathfrak{A} = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta \mathfrak{A} + k^2 \mathfrak{A} = 0.$$

Es sei gleich bemerkt, daß für einen rhombischen Kristall der Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  nicht durch (5), sondern durch die drei Gleichungen

$$(5') \quad \mathfrak{D}_x = \epsilon_x \mathfrak{E}_x; \quad \mathfrak{D}_y = \epsilon_y \mathfrak{E}_y; \quad \mathfrak{D}_z = \epsilon_z \mathfrak{E}_z$$

gegeben ist und daß daher die drei Komponenten von  $\mathfrak{A}$  verschiedene Gleichungen (b) erfüllen, indem statt des einheitlichen  $\epsilon$  die  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  für die drei Komponenten  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  zu setzen sind. Aber hier wie im isotropen Körper (kubischen Kristall) ist stets

$$(e) \quad \text{rotrot } \mathfrak{A} = \mathfrak{D}.$$

Soviel zur Begründung dafür, daß das angewandte Verfahren die Fresnelschen Formeln für den Vektor  $\mathfrak{D}$  liefert, nicht für  $\mathfrak{E}$ . Es läßt sich aber noch eine Bemerkung an den Übergang von der Differentialgleichung (a) zu (b) anknüpfen, die ebenfalls mit der Definition der Größen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  zusammenhängt und die ein interessantes Licht auf die logische Stellung des ersten Teiles der Dispersionstheorie wirft.

Das Gesamtpotential erfüllt vor der Mittelung die Gleichung (a), nach der Mittelung die Gleichung (b). Die Integration über das Elementarparallelepiped kann nur deshalb eine Änderung in der Differentialgleichung herbeiführen, weil über den Pol integriert wird. Für die Integration von  $\mathfrak{P}$ , das unendlich wird wie  $1/R$ , ist der Pol belanglos. Wird aber  $\Delta \mathfrak{P}$  über den Pol integriert, so liefert in bekannter Weise die nächste Umgebung des Pols den Beitrag  $4\pi p$ , wenn mit  $p$  das Moment des Dipols  $e \cdot a$  bezeichnet wird, während der Rest des Integrationsraumes  $\Delta \mathfrak{P}$  liefert, unter  $\mathfrak{P}$  das gemittelte Potential verstanden. Die Mittelung der Gleichung (a) über das Volum  $v$  gibt also:

$$(d) \quad \Delta \mathfrak{P} + k_0^2 \mathfrak{P} + \frac{4\pi}{v} p = 0.$$

Soll nun das gemittelte Potential das Potential der Maxwell'schen Größe  $\mathfrak{D}$  sein, so muß es deren Ausbreitungsgleichung erfüllen, d. h. es muß auch sein

$$(e) \quad \Delta \bar{\mathfrak{P}} + k^2 \bar{\mathfrak{P}} = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt der Mittelwert des Potentials selber:

$$(k_0^2 - k^2) \bar{\mathfrak{P}} = -\frac{4\pi}{v} \bar{p} = -4\pi \bar{p}$$

oder

$$(f) \quad \bar{\mathfrak{P}} = -\frac{4\pi}{k_0^2 - k^2} \bar{p}.$$

Dies aber ist genau das in der Dispersionstheorie (I, Gl. 8, § 6) oder nochmals im Teil II aus der Summation der Dipolfelder durch Mittelung abgeleitete Resultat (Gl. 20).

Man sieht: wird vorausgesetzt, daß der Mittelwert des Potentials das Potential des optischen Feldes ist und deshalb die Gleichung (e) erfüllt, so braucht man sich nicht erst mit der Berechnung des genauen Feldes auf Grund der Dipolschwingungen aufzuhalten, sondern kann die Maxwell'schen Größen direkt dem Ansatz der Dipolschwingungen entnehmen. Ob freilich der angesetzte Schwingungszustand des Gitters dynamisch möglich ist, läßt sich ohne näheres Eingehen auf das Feld nicht sagen, erfordert aber zur Entscheidung nur die Kenntnis des Feldes in der unmittelbaren Nähe der Dipoles (erregendes Feld).

Die logische Stellung unserer Berechnung des Gesamtfeldes auf Grund des Dipolansatzes ist im ersten Teil der Dispersionstheorie die eines Existenzbeweises: es wird ohne die Annahme, die zur Ableitung von (f) nötig ist, gezeigt, daß ein Mittelwert des Potentials existiert, der die Gleichung (b) erfüllt und daher das Potential des optischen Feldes ist. In der Theorie der Reflexion und Brechung hingegen dient die Berechnung des Gesamtfeldes dazu, die dynamische Seite der Aufgabe zu lösen und wäre also auch unter Benutzung der Beziehung (f) nicht zu umgehen.

Schließlich sei auf den Vergleich mit der H. A. Lorentz'schen Definition<sup>1)</sup> hingewiesen. Nach Lorentz ist, in unseren Einheiten geschrieben,

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \pi 4 \bar{p},$$

1) Enzyklop. d. math. Wiss. V. 14 (XXI), (XXV), (XXXI) u. Nr. 30.

oder

$$(g) \quad \mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \cdot 4\pi \bar{p} = -4\pi \cdot \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} \bar{p}.$$

Die gleiche Beziehung zwischen der dielektrischen Verschiebung und Polarisation erhalten auch wir aus den Beziehungen (c) und (f) in allen Fällen, in denen der Ansatz der mittleren Polarisation  $\bar{p}$  einen mit den Maxwell'schen Gleichungen (1) bis (4) verträglichen Zustand nachahmt, indem

$$\Delta \bar{p} + k^2 \bar{p} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{p} = 0$$

ist. Wir haben dann nach der Definition (c)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{P} = -4\pi \frac{1}{k_0^2 - k^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{p} \\ &= -4\pi \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} \bar{p} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Lorentz.

Die in (c) enthaltene Definition führt somit bei den Ansätzen der Dipolbewegung, die überhaupt den Vergleich mit dem Maxwell'schen Felde zulassen, zu dem bekannten Vektor der dielektrischen Erregung oder Verschiebung.

#### § 6. Wellenaustritt, Totalreflexion.

Um den Austritt einer ebenen Welle aus dem Körper, der nach wie vor den oberen Halbraum erfüllt, zu untersuchen, sind nur geringe Änderungen in den Endformeln nötig. Der Ansatz unterscheidet sich von dem vorigen nur durch die Umkehrung der Wellenrichtung, d. h. die Größen  $a, \beta, \gamma$  sind durch ihre negativen Werte zu ersetzen. Nehmen wir diese Änderung an den Hauptgliedern der drei Potentiale (20, 23, 24) vor, so lauten diese:

$$(28a) \quad \Pi_a = \frac{i\pi}{2ab} e^{-iax - i\beta y - iv_{00}z} \frac{1}{1 - e^{2ic(v_{00} - y)}} \cdot \frac{1}{v_{00}},$$

$$(28b) \quad \Pi_c = \frac{i\pi}{2ab} e^{-iax - i\beta y + iv_{00}z} \frac{1}{1 - e^{-2ic(v_{00} + y)}} \cdot \frac{1}{v_{00}},$$

$$(28c) \quad \Pi_q = \frac{\pi}{2abc} e^{-iax - i\beta y - iyz} \frac{1}{k_0^2 - k^2}.$$

Hierin hat  $v_{00}$  den alten Wert behalten:

$$(28d) \quad v_{00} = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - \beta^2} = k_0 \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \beta}.$$

In  $\Pi_q$  erkennen wir die alte Welle wieder, die mit der Geschwindigkeit  $q$ , diesmal auf die Trennungsfläche zu läuft. Ihre Amplitude ist unverändert.

Sowohl  $\Pi_s$  wie  $\Pi_e$  haben die Phasengeschwindigkeit  $c$  und haben ihren Winkel gegen die  $z$ -Achse beibehalten, aber die Winkel gegen  $x$ - und  $y$ -Achse so verändert, daß die negativen Achsenrichtungen an Stelle der positiven getreten sind. Auch die Amplituden sind gegen früher abgeändert; wir ersetzen wie oben § 3, Gl. (28a):

$$(28') \quad \frac{1}{1 - e^{-2ic(v_{00} - \gamma)}} \text{ durch } -\frac{1}{2ic} \frac{1}{v_{00} - \gamma},$$

$$(28'') \quad \frac{1}{1 - e^{-2ic(v_{00} + \gamma)}} \quad " \quad \frac{1}{2ic} \frac{1}{v_{00} + \gamma}.$$

Die Bilder der Wellen, die aus den Ansätzen für Einfall und Austritt resultieren, seien in Fig. 5 einander gegenübergestellt.

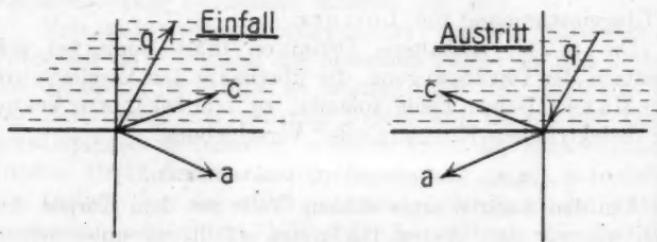


Fig. 5.

Man erkennt nun ohne Mühe, wie den dynamischen Forderungen Genüge getan werden kann. Die Innenwelle, die mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreitet, muß fortgeschafft werden,

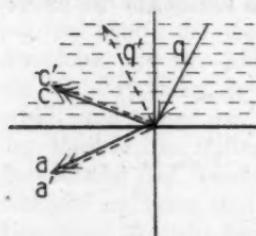


Fig. 6.

da sie die Elektronen, die allein mit der Welle  $q$  im Gleichgewicht stehen, stört. Dies wird erreicht, indem die Dipolschwingungen der nach innen reflektierten Welle  $q'$  angesetzt werden (Fig. 6), die ja ihrerseits eine Innenwelle  $c'$  von gleicher Richtung liefern, wie  $c$ . Ihre Amplitude wird durch die Forderung bestimmt, daß  $c$  und  $c'$  sich aufheben. Dies ist zugleich die Bedingung dafür, daß die neuangesetzten Dipolschwingungen mit ihrem Felde  $q'$  harmonieren. Der Anteil, der schließlich als durchgelassene Welle  $a'$  in das äußere Medium tritt, setzt sich aus den *beiden* von  $q$  und

von  $q'$  herrührenden Bestandteilen  $a$  und  $a'$  zusammen. Setzen wir die Amplitude der vom Innern auf die Trennungsfläche auffallenden Welle gleich 1, so haben wir folgende Formeln für die Amplituden der Potentiale:

$$q \dots 1$$

$$(29a) \quad c \dots = \frac{1}{\nu_{00} + \gamma} \cdot \frac{1}{\nu_{00}} \cdot (k_0^2 - k^2) \text{ nach (28b) u. (28')}$$

Daher

$$c' \dots + \frac{1}{\nu_{00} + \gamma} \cdot \frac{1}{\nu_{00}} \cdot k_0^2 - k^2$$

weiter nach (20, 23, 28a)

$$q' \dots = 2 \cdot \frac{(\nu_{00} - \gamma) \cdot \nu_{00}}{k_0^2 - k^2} |c'|$$

$$(29b) \quad = - \frac{\nu_{00} - \gamma}{\nu_{00} + \gamma},$$

und hieraus nach (28a, 28') und (20, 24, 24a)

$$a'' = a + a' \dots$$

$$(29c) \quad \frac{1}{\nu_{00} - \gamma} \cdot \frac{1}{\nu_{00}} (k_0^2 - k^2) - \frac{1}{(\nu_{00} + \gamma)^2} \frac{1}{\nu_{00}} (k_0^2 - k^2).$$

Gehen wir zu den Feldern über, so erhalten  $q$  und  $q'$  den Faktor  $k^2$ , die Welle  $a''$  im Außenraum hingegen  $k_0^2$ . Setzen wir die Amplitude der Feldstärke bei der Welle  $q$  weiter gleich 1, so erhält die Amplitude von  $a''$  hiergegen den Faktor  $k_0^2/k^2 = 1/\nu^2$ . Unter Benutzung der beiden in der Anmerkung zu § 4, p. 132 erwähnten Formeln wird die Amplitude der nach innen reflektierten und der durchtretenden Welle, für den Fall, daß die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden

$$(30) \quad q' \dots = \frac{\sin(3 - 3_0)}{\sin(3 + 3_0)}; \quad a'' \dots \frac{2}{\nu^2} \frac{\cos(3 \sin 3_0)}{\sin(3 + 3_0)}.$$

Dies sind die aus den Fresnelschen Formeln (27a, b) folgenden Werte, wenn in ihnen Winkel (3) und ( $3_0$ ) vertauscht und entsprechend  $\nu$  durch  $1/\nu$  ersetzt wird, wie es dem Eintritt vom dichteren in das dünneren Medium entspricht.

Wir haben also durch Erfüllung der dynamischen Bedingungen auch im Falle des Wellenaustritts die richtigen Amplituden erhalten. Hierbei war für die letzten Umrechnungen stillschweigend vorausgesetzt, daß

$$\nu_{00} = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - \beta^2} = k_0 \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 3}$$

sich ersetzen ließe durch  $k_0 \cos \beta_0$ . Wir befanden uns also außerhalb des Falles der Totalreflexion.

Nehmen wir nun an, der Einfallswinkel (8) der Innenwelle gegen die Trennungsfläche sei so groß, daß Totalreflexion eintritt.  $\nu_{00}$  ist dann imaginär und die beiden im Gefolge von (q) auftretenden Randwellen — im Innen- und im Außenraum — sind nicht länger homogen, sondern inhomogen. Sie schließen sich in dieser Hinsicht den höheren Gliedern der Reihen (14) und (16) für die Potentiale  $\Pi_a$  und  $\Pi_c$  an, deren Grundglieder (00) sie waren. Aber gegenüber diesen höheren Gliedern, etwa dem Glied (01) besteht ein quantitativer Unterschied in dem Grad der Inhomogenität.

Während

$$\nu_{00} = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - (\pi/b - \beta)^2} \simeq i\pi/b$$

einen imaginären Wert von der Größenordnung  $1/b$  hat, ist

$$\nu_{00} = ik_0 \sqrt{\nu^2 \sin^2 \beta - 1} \simeq ik_0$$

nur von der Größenordnung  $k_0$ , d. h.  $1/\lambda$ . Die inhomogene Welle (00) reicht also bis in Tiefen von der Größe der Wellenlänge mit merklicher Stärke hinab, während die höheren Wellen nicht über die erste Atomschicht hinauskommen. Auch betreffs der absoluten Größe der Amplitude treten wegen des Faktors  $1/\nu_{lm}$ , wie früher, die höheren inhomogenen Wellen weit hinter die Grundwelle zurück. Physikalisch gesprochen stellen die höheren inhomogenen Glieder die Störungen am Rande dar, die durch die Diskontinuität der Oberfläche entstehen, die Welle (00) hingegen wird unabhängig von der feineren oder gröberen Beschaffenheit des Oberflächennetzes von Atomen durch den inneren Vorgang erzeugt.

Die dynamischen Bedingungen bleiben bei der Totalreflexion die gleichen, wie bei dem eben besprochenen Austritt einer Welle aus dem Körper. Die inhomogene Innenwelle  $c$  muß dadurch beseitigt werden, daß die nach innen reflektierte Welle angesetzt wird; im Innenraum überlagern sich die beiden inhomogenen Wellen  $c$  und  $c'$ . Für die reflektierte Welle im Innern erhalten wir wie oben (29b) die Amplitude

$$-\frac{\nu_{00} - \gamma}{\nu_{00} + \gamma} = \frac{k \cos \beta - ik_0 \sqrt{\nu^2 \sin^2 \beta - 1}}{k \cos \beta + ik_0 \sqrt{\nu^2 \sin^2 \beta - 1}}.$$

Ihr absoluter Betrag, auf den es ankommt, ist 1, da Zähler und Nenner konjugiert komplex sind.

Das Potential der inhomogenen Welle im Außenraum hat am Rande die Amplitude (vgl. 29 c)

$$\frac{1}{\nu_{00}} (k_0^2 - k^2) \left( \frac{1}{\nu_{00} - \gamma} - \frac{\nu_{00} - \gamma}{(\nu_{00} + \gamma)^2} \right) = \frac{2 \cos 3}{(i \sqrt{\nu^2 \sin^2 3 - 1} + \nu \cos 3)}.$$

Hier von ist der Betrag

$$\frac{2 \cos 3}{\sqrt{\nu^2 - 1}}.$$

Beim Übergang zum Feld des elektrischen Vektors tritt wie oben hinzu der Faktor  $k_0^2/k^2 = 1/\nu^2$ . Daß dies Resultat mit der Maxwellschen Theorie übereinstimmt, folgt daraus, daß es hier wie dort aus den Fresnelschen Formeln hervorgeht, wenn  $\cos 3_0$  durch  $i \sqrt{\nu^2 \sin^2 3 - 1}$  ersetzt wird.

### § 7. Übergang zum Fall von Röntgenwellen.<sup>1)</sup>

Die Reihen (14, 15, 16) für das Feld innerhalb und außerhalb des Kristalls gelten auf Grund des Ansatzes in aller Strenge. Die Diskussion der vorigen Paragraphen zeigte, daß für den Fall optischer Wellen ( $ak \ll 1$ ) die drei Reihen sich im wesentlichen auf die Grundglieder reduzieren, in denen alle Indizes Null sind.

Anders ist es, wenn Röntgenstrahlen das Gitter durchsetzen.<sup>2)</sup> Wir betrachten das Feld im Außenraum, dessen Potential die Reihe (14) ist. (Dieselbe Betrachtung läßt sich auch an den Austritt des Röntgenstrahls anknüpfen.) Es gibt jetzt eine ganze Reihe von Gliedern, für welche

$$\nu_{lm} = \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{l\pi}{a} - \alpha \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{b} - \beta \right)^2}$$

reell ist, und die deshalb *homogene* ebene Wellen darstellen. Unter diesen Wellen treten jene besonders hervor, bei denen

1) Diesen Fall habe ich auf Grund der Formel (14) schon behandelt in Phys. Zeitschr. 14. p. 465. 1913.

2) Das Gitter ist natürlich als ideal regelmäßig gedacht. Insbesondere wird von der intensitätschwächenden Wärmebewegung hier vollkommen abgesehen.

der Nenner von (14) verschwindet. Die Bedingung, daß der erste Faktor verschwindet, ist, daß

$$c(v_{lm} + \gamma) = n\pi$$

ist, wo  $n$  eine positive oder negative ganze Zahl ist. Umformung ergibt

$$(31) \quad (l\pi/a - \alpha)^2 + (m\pi/b - \beta)^2 + (n\pi/c - \gamma)^2 = k_0^2.$$

Zu beachten ist, daß hier (jedenfalls in großer Annäherung) gilt

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k_0^2 (= k^2).$$

Gleichung (31) führt direkt auf die Kugelkonstruktion<sup>1)</sup> zur Bestimmung der Richtung der Interferenzmaxima und ist identisch mit den Laueschen Bedingungen<sup>2)</sup> für das Auftreten eines Interferenzmaximums.

Daß die Amplitude der Wellen unendlich groß wird, liegt an dem Zusammenwirken der unendlich vielen Dipole und Fortlassen der Absorption.

Übrigens beachte man, daß im Kristallinnern beim Potential  $\Pi_0$  ebenfalls diejenigen Wellen ( $l, m, n$ ) maximale Stärke erreichen, für die (31) erfüllt ist. Das Feld im Innern besteht jetzt auch wesentlich aus den durch Interferenz bevorzugten Wellen. Unter diesen befindet sich, gleichberechtigt mit den andern, stets die Welle 000, die im optischen Fall als gebrochener Stahl allein hervortrat.

Man erhält in (14) scheinbar noch auf eine zweite Art eine unendliche Amplitude, wenn nämlich der zweite Nenner verschwindet:

$$v_{lm} = 0.$$

Jedoch ergibt sich aus der Ableitung der Formel (14) (die Pole sind in diesem Falle von zweiter Ordnung) daß (14) auf diesen Fall nicht ausgedehnt werden darf.

Es ist lehrreich, den Übergang vom Fall der Röntgenstrahlen zum Fall der Optik eingehender zu betrachten. Zu dem Zwecke lassen wir  $a, b, c$  allmählich abnehmen — wir können uns denken, daß das Gitter zusammenschrumpft, während wir die Wellenlänge festhalten. Es gibt dann immer weniger

1) P. P. Ewald, loc. cit. oder Enzyklop. d. math. Wiss., Artikel Laue, V. 24. Nr. 48.

2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 41, p. 971 ff. 1913 und Enzyklop. d. math. Wiss. Artikel Laue, V. 24. Nr. 46.

Wertpaare  $l, m$ , die  $\nu_{lm}$  reell lassen.  $\nu_{lm}$  wird bei festgehaltenem  $l, m$  immer kleiner, d. h. der Schirm von Interferenzwellen der bei kurzen Röntgenstrahlen vorhanden ist, breitet sich aus. Es kommt ein Moment, wo für die am meisten abgebeugten Strahlen  $\nu_{lm} = 0$  wird und von da ab imaginär bleibt: sobald die Wellen sich der Oberfläche anschmiegen, werden sie inhomogen. Das Ausbreiten des Interferenzbündels lässt sich natürlich so auffassen, daß durch das Zusammenschrumpfen des Gitters das Ablenkungsvermögen zunimmt und die Spektren nach außen wandern. Allein der (in der Figur dick gezeichnete) Strahl 00 verändert bei diesem Prozeß seine Lage nicht. Er ist es, der zuletzt übrig bleibt, als das einzige reflektierte Spektrum, das im optischen Gebiet fortbesteht.

(Eingegangen 13. November 1915.)

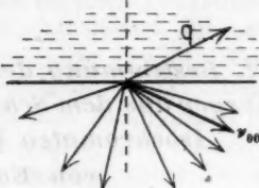


Fig. 7.

menthalte gleichzeitige Abstrahlung eines schwarzen Körpers und einer selektiven Strahlung eines grauen Körpers auf einen gleichen Raum aus, so daß die Intensität der Strahlung des grauen Körpers im sichtbaren Spektrum um so größer ist, je höher die Temperatur des grauen Körpers ist.

**2. Bestimmung der wahren Temperatur fester Körper aus dem Schnittpunkt der logarithmischen Isochromaten im sichtbaren Spektrum;**  
von Edward P. Hyde.

Vor einiger Zeit veröffentlichte Fräulein Elisabeth Benedict<sup>1)</sup> in diesen Annalen unter obigem Titel Resultate einer bei Hrn. Lummer ausgeführten Untersuchung über die wahren Temperaturen grauer Körper und die selektive Strahlung anderer Lichtquellen, die durch Anwendung eines gewissen, zuerst von Lummer<sup>2)</sup> angegebenen Kriteriums gewonnen worden waren. Dieses Kriterium lautet folgendermaßen: Schneiden sich die durch Messungen mit einer Vergleichslampe bei konstanter Temperatur gewonnenen logarithmischen Isochromaten eines schwarzen oder grauen Körpers bei ihrer Verlängerung in einem Punkte, so ist die Energieverteilung im Spektrum der Vergleichslampe die nämliche wie im Spektrum eines schwarzen oder grauen Körpers bei derjenigen Temperatur, welche dem gemeinsamen Schnittpunkte entspricht; hieraus ergibt sich, daß die Vergleichslampe ein grauer Körper, und ihre wahre Temperatur gleich der Temperatur des schwarzen Körpers ist, die dem Schnittpunkte entspricht. Schneiden sich die logarithmischen Isochromaten nicht in einem gemeinsamen Punkte, so weist die dabei auftretende Abweichung auf selektive Strahlung hin.

Letztere Schlußfolgerung ist insofern zweifellos richtig, als das Auftreten einer derartigen Abweichung eine ausreichende Bedingung für das Vorhandensein von selektiver Strahlung ist; in theoretischer Hinsicht, sowie in praktischen Fällen scheint jedoch das Zutreffen des Kriteriums keine hinreichende

1) E. Benedict, Ann. d. Phys. 47. p. 641. 1915.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 3. p. 36—42. 1901.

Beding  
ist leid  
ist, da  
größer  
dem 1.  
ein sc  
peratu  
Spekt  
mit de  
Körper  
ratur  
Falle v  
die den  
spricht

So  
die frü  
zeigen  
oder 2)  
trum  
halb d  
trum e  
dener T  
ist. Un  
sie nich  
ihrer S  
graue  
stanzen  
Osmium  
tivität  
bestimmt  
der Ene  
graue  
werden  
die unter  
gleichsk  
schwarze

Ich  
wählt  
Spannung  
Kohlenfa

Bedingung für schwarze oder graue Strahlung zu sein. Es ist leicht möglich, daß eine Strahlungsquelle gänzlich selektiv ist, d. h. z. B. im blauen Ende des Spektrums ein weit größeres Emissionsvermögen besitzt als im roten Ende; trotzdem kann der Charakter der Selektivität derart sein, daß ein schwarzer oder grauer Körper bei einer gewissen Temperatur genau die nämliche Energieverteilung im sichtbaren Spektrum besitzt, d. h. die logarithmischen Isochromaten des mit der Strahlungsquelle verglichenen grauen oder schwarzen Körpers schneiden sich in einem Punkte. Die wahre Temperatur der selektiven Vergleichslampe ist natürlich in diesem Falle von der Temperatur des schwarzen oder grauen Körpers, die dem Schnittpunkte der logarithmischen Isochromaten entspricht, gänzlich verschieden.

Soweit also die Ergebnisse von Fräulein Benedict oder die früheren Resultate von Lummer gedeutet werden können, zeigen sie, daß die Strahlung der Kohle 1) entweder grau oder 2) derart selektiv ist, daß die Energieverteilung im Spektrum der Kohlenlampe bei irgendeiner Temperatur innerhalb der Beobachtungsfehler die nämliche ist wie im Spektrum eines schwarzen oder grauen Körpers bei etwas *verschiedener* Temperatur, wobei der Temperaturunterschied unbekannt ist. Unabhängige Beobachtungen zeigen, daß die Kohle, falls sie nicht tatsächlich ein grauer Körper ist, sich im Charakter ihrer Strahlung im sichtbaren Spektrum nur wenig von einem grauen Körper unterscheidet. Natürlich erhebt sich bei Substanzen mit gänzlich selektiver Strahlung, wie Wolfram, Tantal, Osmium und Platin die Frage, ob der Charakter der Selektivität derart ist, daß die Energieverteilung bei irgendeiner bestimmten Temperatur innerhalb der Beobachtungsfehler mit der Energieverteilung in der Strahlung eines schwarzen oder grauen Körpers bei etwas verschiedener Temperatur verglichen werden kann. Mit anderen Worten: Ist zu erwarten, daß die unter Benutzung einer der genannten Substanzen als Vergleichskörper gewonnenen logarithmischen Isochromaten eines schwarzen oder grauen Körpers sich in einem Punkte schneiden?

Ich glaube, Wolfram kann zweckmäßig als Beispiel gewählt werden. Wird eine Wolframlampe mit einer solchen Spannung betrieben, daß ihre Farbe der eines unbehandelten Kohlenfadens (der für den Augenblick angenähert als grauer

Körper behandelt werden kann) bei bestimmter Temperatur gleicht, so stimmt die Energieverteilung der Wolframlampenstrahlung, wie sich durch ausgedehnte spektralphotometrische Messungen ergab<sup>1)</sup>, innerhalb eines Fehlers von weniger als 1 Proz. mit der Energieverteilung der Kohlenlampenstrahlung im ganzen Bereich des sichtbaren Spektrums ( $0,5 \mu - 0,7 \mu$ ) überein. Kurve *a* in Fig. 1 zeigt die beobachteten relativen

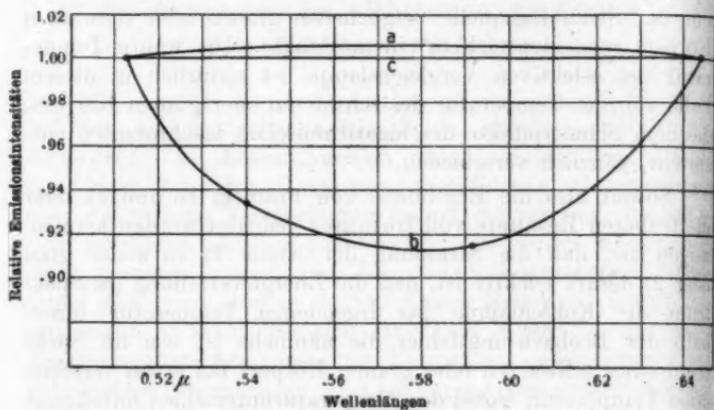


Fig. 1. Auf verschiedenen Wegen gewonnene relative Emissionskurven des Wolfram; als Einheiten für die Ordinaten dienen die entsprechenden Ordinaten der Emissionskurve der Kohle bei einer willkürlichen gewählten Temperatur.

*a* Durch direkten spektroskopischen Vergleich gewonnene relative Emissionskurve von Wolfram; als Einheiten für die Ordinaten dienen die Ordinaten der Emissionskurve der Kohle (*c*) bei einer willkürlichen Temperatur (der Wolfram befindet sich bei solcher Temperatur, daß die relativen Emissionsintensitäten für  $0,645 \mu$  und  $0,513 \mu$  bei beiden Lampen gleich groß sind).

*b* Aus den Daten von Fr. Benedict, unter denselben Bedingungen wie bei *a*, berechnete Emissionskurve von Wolfram.

Emissionsintensitäten der Wolframlampe, gemessen an den Emissionsintensitäten der Kohlenlampe. Ich nehme an, daß die Unterschiede im Verlaufe der Kurven zu klein sind, um

1) Astz. Journ. 36. p. 89. 1912.

sich bei der Zeichnung der logarithmischen Isochromaten bemerkbar zu machen; die mit der Wolframlampe als Vergleichsquelle erhaltenen logarithmischen Isochromaten eines grauen oder schwarzen Körpers müssen somit einen gemeinsamen Schnittpunkt aufweisen.

Es ist von Interesse, den Vorgang umzukehren, aus den Daten von Fräulein Benedict für den vorhin erwähnten Fall die Energieverteilung in der Strahlung der Wolframlampe zu berechnen und das Ergebnis mit der in der Figur gezeichneten Emissionskurve *a* zu vergleichen. Der Schnittpunkt zweier logarithmischer Isochromaten, welche irgend zwei bestimmten Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  entsprechen, ergibt die Temperatur des schwarzen oder grauen Körpers, bei welcher die relativen Emissionsintensitäten für diese beiden Wellenlängen ebenso groß sind wie bei der als Vergleichsquelle dienenden Wolframlampe bei der benutzten Spannung. Durch Ermittlung der Schnittpunktstemperaturen der logarithmischen Isochromate für  $0,645 \mu$  (Fig. 13, p. 672 von Frln. Benedicts Arbeit) mit den Isochromaten für  $0,592 \mu$ ,  $0,540 \mu$  und  $0,518 \mu$  lassen sich aus Wiens Gleichung für einen schwarzen (oder grauen) Körper die relativen Emissionsintensitäten der Wolframlampe für die verschiedenen Wellenlängen leicht berechnen. Die Ergebnisse eines derartigen Vergleiches zeigt Kurve *b* in Fig. 1, welche die aus den Daten von Fräulein Benedict bestimmte Emissionskurve von Wolfram darstellt, wobei wieder die Emission der Kohlenlampe als Einheit angenommen wurde. Wie oben erwähnt<sup>1)</sup>, wurde Kurve *a* im Laboratorium des Verfassers durch direkten spektralphotometrischen Vergleich einer Wolframlampe mit einer Kohlenfadenlampe gewonnen. Kurve *b* zeigt, daß die aus den Daten von Fräulein Benedict berechnete Emission von Wolfram bei  $0,540 \mu$  um  $6\frac{1}{2}$  Proz. und bei  $0,592 \mu$  um  $8\frac{1}{2}$  Proz. von der Emission der Kohle abweicht, falls die beiden Fäden bei solchen Temperaturen untersucht werden, daß die relativen Emissionsintensitäten bei  $0,645 \mu$  und  $0,518 \mu$  gleich sind.

Wahrscheinlich ist irgendeine Fehlerquelle oder Unbestimmtheit in Fräulein Benedicts Messungen die Ursache für die unmöglichen Werte des relativen Emissionsvermögens

1) l. c.

von Wolfram, die sich aus ihren Angaben ergeben und in Kurve *b* dargestellt sind. Es ist überdies fraglich, ob das Schnittpunktskriterium der logarithmischen Isochromaten hinreichend genau ist, um die Selektivität von strahlenden Körpern wie Tantal, Osmium, Platin usw. anzuzeigen. Angaben über die Energiekurven dieser Substanzen, ähnlich der in der Figur gezeichneten Wolframkurve *a*, werden wohl zeigen, daß sich die logarithmischen Isochromaten innerhalb der Beobachtungsfehler in einem gemeinsamen Punkte schneiden.

Cleveland, Ohio, Nela Research Laboratory,

28. September 1915.

(Eingegangen 25. Oktober 1915.)

3.

D  
artigen  
K  
äußerst  
nicht  
Moleku  
Nu  
theorie  
läufiger  
keit de  
hat. Ha  
vin<sup>4)</sup>,  
gegeben

Au  
Theorie  
folgedes  
müßten  
seiner

1)  
17. p. 15  
2) I  
ist. Sch  
Überlegu  
keiten ni  
lich beob  
Magneti  
ist die U

3)  
4)  
5)  
6)

Annale

3. *Statistische Theorie des Dia-, Para- und Metamagnetismus;*  
*von R. Gans.*

§ 1. Einleitung.

Die Theorie des Magnetismus befindet sich in einer eigenartigen Krisis.

Kürzlich zeigten Einstein und de Haas<sup>1)</sup> in einer äußerst wichtigen Arbeit, daß der Magnetismus im Eisen nicht durch Elementarmagnete, sondern durch Ampèresche Molekularströme erzeugt wird.<sup>2)</sup>

Nun behauptete Kroo<sup>3)</sup>, daß eine strenge Elektronentheorie des Magnetismus, die von der Vorstellung zwangsläufiger Elektronen Abstand nehmen muß, die Unmöglichkeit des Paramagnetismus und Ferromagnetismus zur Folge hat. Hätte er recht, so würde damit den Theorien von Langevin<sup>4)</sup>, Weiss<sup>5)</sup> und von mir und P. Hertz<sup>6)</sup> der Todesstoß gegeben sein.

Außerdem zeigte sich der Widerspruch, daß *nach der Theorie* zirkulierende Elektronensysteme ausstrahlen und infolgedessen ihr magnetisches Moment allmählich verlieren müßten, während *erfahrungsgemäß* ein Magnet jahrelang in seiner Stärke konstant bleiben kann.

1) A. Einstein u. W. J. de Haas, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 152. 1915.

2) Historisch sei bemerkt, daß die Idee dieses Versuches nicht neu ist. Schon Richardson, Phys. Rev. 26. p. 248. 1908, stellte die gleichen Überlegungen an, konnte aber infolge der experimentellen Schwierigkeiten nicht zum Resultat kommen. *Nachtrag bei der Korrektur:* Kürzlich beobachtete S. J. Barnett, Phys. Review (2) 6. p. 239. 1915 die Magnetisierung eines Eisenzylinders durch Rotation um seine Axe. Das ist die Umkehrung des Einstein-de Haasschen Versuchs.

3) J. Kroo, Ann. d. Phys. 42. p. 1354. 1913.

4) P. Langevin, Ann. Chim. Phys. (8) 5. p. 70. 1905.

5) P. Weiss, Arch. des sciences phys. et nat. (4) 31. p. Mai 1911.

6) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. p. 197; 1911. p. 1.

Allerdings scheint ein Ausweg diesem Bedenken gegenüber der zu sein, daß man annimmt, die Molekularbewegung stelle dauernd die durch Strahlung sich vermindernde kinetische Energie der Elementarmagnete wieder her; doch dann dürfte das magnetische Moment derselben nicht temperaturunabhängig sein, wie die Weiss'schen Messungen einwandfrei zeigen, und vor allem könnte bei äußerst tiefen Temperaturen kein Magnetismus mehr existieren, was durch die schönen und exakten Messungen von Kamerlingh Onnes und Weiss<sup>1)</sup> sowie anderen außer Frage gestellt ist.

Nur die Annahme einer Nullpunktsenergie — meinen Einstein und de Haas — könnte diesen experimentellen Befund noch mit der Theorie in Einklang bringen.

Ferner hat Langevin versucht, die Temperaturunabhängigkeit der spezifischen Suszeptibilität diamagnetischer Körper dadurch zu erklären, daß er annahm, in diamagnetischen Stoffen kreisen die Elektronen im Innern vom Atom und seien dadurch jeglicher Einwirkung der thermischen Agitation entzogen. Mir scheint es nun schwer, sich ein System vorzustellen, das sich im Innern des Moleküls ganz unabhängig von der Bewegung des letzteren selbst bewegt und gleichsam wie in den bekannten Hexenschaukeln der Jahrmarkte gar nicht an den Einflüssen teilhat, denen die Umgebung unzweifelhaft unterliegt.

Sodann müßte nach dieser Theorie die diamagnetische Suszeptibilität in Strenge vom Felde unabhängig sein, was sie nach den umfangreichen Messungen von Honda<sup>2)</sup>, die dieser auf Veranlassung von du Bois angestellt hat, vielfach nicht ist, ebensowenig wie er durchweg Konstanz mit der Temperatur gefunden hat. Zwar glaubte Honda, daß die Abhängigkeit von der Feldstärke auf Verunreinigung durch Eisen zurückgeführt werden könne, was mir durchaus nicht sicher erscheint; aber das Verhalten der Temperatur gegenüber ist durch solche Beimischungen keinesfalls zu erklären.

Schließlich wurde von R. H. Weber und Overbeck<sup>3)</sup>

1) P. Weiss u. H. Kamerlingh Onnes, Journ. de phys. 1910.

2) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. p. 1027. 1910.

3) K. Overbeck, Über metamagnetische Legierungen. Rostocker Diss. 1914; Sitzungsber. u. Abh. d. Naturforsch. Ges. zu Rostock. Neue Folge 6. p. 141. 1914; Ann. d. Phys. 46. p. 877. 1915.

kürzlich  
gibt, d  
in stan  
her jeg  
den Er  
aber n  
nicht o

Die  
alle an  
eines e  
— wer  
gerecht  
Wi

Ergebn  
Experi  
mäßige  
achtung  
molekü

§ 2.

Un  
Elektro  
Körper

Die  
mit gle  
Kugel,  
Kugelze  
Um

Feldes  
einige L

Ers  
schleuni  
vorgeru  
ist, d.  
Bedingu  
bestimm

(1)

1)

kürzlich beobachtet, daß es metamagnetische Legierungen gibt, d. h. solche, die in schwachen Feldern paramagnetisch, in starken diamagnetisch sind, ein Phänomen, zu dem bisher jeglicher Schlüssel fehlt, wenn man nicht wiederum zu den Eisenverunreinigungen seine Zuflucht nehmen will, was aber nach den sorgsamen Studien Webers und Overbecks nicht ohne weiteres ausreicht, um die Tatsachen zu verstehen.

Die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung soll es sein, alle angeführten Bedenken zu entkräften und auf Grund eines einfachen Mechanismus eine Theorie zu entwickeln, die — wenigstens in den großen Zügen — den Beobachtungen gerecht wird.

Wieweit sie in den Einzelheiten mit den quantitativen Ergebnissen der Messungen übereinstimmt, sollen spätere Experimente entscheiden. Gleichzeitig wird der zahlenmäßige Vergleich der entwickelten Formeln mit den Beobachtungen über die Anzahl Elementarmagnete im Gramm-molekül sowie über ihre Trägheitsmomente Aufschluß geben.

### § 2. Die statistisch-elektronentheoretischen Grundlagen.

Unter einem Magneton wollen wir uns einen starren, aus Elektronen aufgebauten, d. h. negativ elektrisch geladenen Körper vorstellen.

Dieses Elektronensystem befindet sich im Innern einer mit gleicher Gesamt elektrizität gleichförmig positiv geladenen Kugel, so daß der Schwerpunkt des Magnetons mit dem Kugelzentrum zusammenfällt.

Um auf ein System solcher Gebilde im magnetischen Felde die statistische Mechanik anwenden zu können, sind einige beschränkende Annahmen nötig.

Erstens müssen, wie Kroo richtig bemerkt, die Beschleunigungen so gering sein, daß die durch Strahlung herverursachte Dämpfungskraft klein gegen die Trägheitskraft ist, d. h. die Bewegung muß quasistationär sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt nach Lorentz<sup>1)</sup> als bewegungsbestimmendes Prinzip

$$(1) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \{(T + T_m) - (U + U_m)\} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

1) H. A. Lorentz, Elektronentheorie. Math. Enz. 5. Nr. 14. p. 170.

In dieser Formel bedeutet  $T_m$  die kinetische Energie des Systems,  $U_m$  die potentielle Energie der mechanischen Kräfte,  $T$  die magnetische,  $U$  die elektrische Energie.

Das durch Gleichung (1) dargestellte Variationsprinzip ist genau analog dem in der Mechanik geltenden Hamiltonschen Prinzip.

Da keine Kräfte mechanischen Ursprunges angenommen werden sollen, so ist  $U_m = 0$ . Ferner zeigen die in der Einleitung erwähnten Messungen von Einstein und de Haas, daß die Masse der Magnetonen im Eisen rein elektromagnetischen Ursprunges ist, und so wollen wir auch die materielle Masse und somit die kinetische Energie  $T_m = 0$  setzen.

So geht die in (1) definierte Lagrangesche Funktion  $L$  in die Differenz

(2)

$$L = T - U$$

der magnetischen und elektrischen Energie über.

Nun läßt sich zeigen<sup>1)</sup>, daß die Gesamtenergie  $W = T + U$  sich aus  $L$  wie in der Mechanik mittels der Formel

$$(3) \quad W = T + U = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - L$$

berechnet, unter den  $q_i$  die generalisierten Koordinaten des Systems verstanden.

Nehmen wir ferner die Drehgeschwindigkeiten als so klein an, daß wir die zweiten Potenzen derselben gegen die Einheit vernachlässigen können, so werden die Magnetfelder lineare Funktionen der Drehgeschwindigkeiten, und zwar auch das äußere Magnetfeld; denn wir wollen, wie üblich, um ein energetisch abgeschlossenes System zu behandeln, die Magnetonen, die das äußere Feld erzeugen, mit zum System rechnen.

Somit ist die magnetische Energie eine homogene quadratische Funktion der Drehgeschwindigkeiten.

Wegen der Annahme, die wir über die Konstitution eines Magnetons gemacht haben, wird keine Wechselwirkung elektrischer Kräfte zwischen den einzelnen Magnetonen statt-

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Bd. II. 3. Aufl. p. 173. Leipzig und Berlin 1914.

finden; denn die elektrischen Felder verschwinden in einiger Entfernung, da die positive und die negative Elektrizität gleichen Betrag haben.

Wegen der Kugelform der positiven Elektrizität ist aber auch keine elektrische Richtkraft vorhanden, die die positive Elektrizität auf das negativ geladene Gebilde in seinem Innern ausübt, d. h. die elektrische Energie ist von den  $q_i$  unabhängig, somit höchstens eine quadratische Funktion der  $q_i$ .

Deshalb ist auch die Lagrangesche Funktion  $L = T - U$  eine quadratische Funktion der  $q_i$ , und nach dem Euler-schen Satze über homogene Funktionen wird [siehe (3)]

$$(4) \quad W = T + U = L.$$

Der Vergleich von (2) und (4) ergibt  $U = 0$ , also

$$(5) \quad W = T.$$

*Die Gesamtenergie ist somit rein magnetisch.*

Diese haben wir also zu berechnen.

Nennen wir das magnetische Feld, welches das *ite* Magnetron hervorruft,  $\mathfrak{h}_i$ , so ist

$$\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^n \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \dots + \mathfrak{h}_n;$$

also

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}^2 dS = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_1^2 dS + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_2^2 dS + \dots \\ \quad + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_n^2 dS + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_1 (\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3 + \dots + \mathfrak{h}_n) dS \\ \quad + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_2 (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3 + \dots + \mathfrak{h}_n) dS + \dots \end{array} \right.$$

Führen wir die Eigenenergien

$$(7) \quad T_i = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_i^2 dS$$

ein, und nennen das Feld

$$(8) \quad \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3 + \dots + \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}'_1,$$

so wird, da nach der Elektronentheorie  $\mathfrak{h} = \text{rot } \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{h}_i = \text{rot } \mathfrak{a}_i$ ,  $\mathfrak{h}'_i = \text{rot } \mathfrak{a}'_i$  ist,

$$(9) \quad T = \sum_{i=1}^n T_i + \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^n \int (\mathfrak{h}_i, \text{rot } \mathfrak{a}'_i) dS.$$

Durch partielle Integration wird hieraus

$$(10) \quad T = \sum_{i=1}^n T_i + \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^n \int (\mathbf{a}'_i, \operatorname{rot} \mathbf{h}_i) dS,$$

und substituieren wir den in der Elektronentheorie für quasi-stationäre Bewegungen gültigen Wert

$$(11) \quad \operatorname{rot} \mathbf{h}_i = 4\pi \rho_i \mathbf{v}_i = 4\pi \mathbf{t}_i,$$

berücksichtigen, daß  $\mathbf{t}_i$  nur innerhalb des Raumes  $S_i$ , welchen das  $i$ te Magneton erfüllt, von Null verschieden ist, und daß innerhalb dieses Raumes das fremde Feld  $\mathbf{h}'_i = \mathbf{h} - \mathbf{h}_i$  als konstant und somit  $\mathbf{a}'_i$  als lineare Funktion der Koordinaten angesehen werden kann, so folgt für die magnetische Energie

$$(12) \quad T = \sum_{i=1}^n T_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\operatorname{rot} \mathbf{a}'_i, \mathbf{m}_i) = \sum_{i=1}^n T_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{h}'_i, \mathbf{m}_i),$$

unter  $\mathbf{m}_i$  das magnetische Moment

$$(13) \quad \mathbf{m}_i = \frac{1}{2} \int_S \rho [\mathbf{r}, \mathbf{v}_i] dS$$

des  $i$ ten Magnetons verstanden.<sup>1)</sup>

In Formel (12) bedeutet  $T_i$  die vom  $i$ ten Magneton selbst erzeugte Energie,  $\mathbf{m}_i$  sein magnetisches Moment,  $\mathbf{h}'_i$  das von den übrigen Magnetonen am Orte des  $i$ ten erzeugte Magnetfeld.

Da wir im folgenden auch die Variation der magnetischen Energie kennen müssen, wollen wir dieselbe jetzt berechnen.

Aus (6) folgt

$$(14) \quad \delta T = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{h}, \delta \mathbf{h}) dS = \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \delta \mathbf{h}) dS$$

und durch partielle Integration mit Berücksichtigung von (11)

$$(15) \quad \delta T = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{a}, \delta \operatorname{rot} \mathbf{h}) dS = \int (\mathbf{a}, \delta \mathbf{t}) dS.$$

Zerlegen wir das Feld wieder in das Eigenfeld eines Magnetons und in sein fremdes Feld, so wird

$$(16) \quad \delta T = \sum_{i=1}^n \int (\mathbf{a}_i, \delta \mathbf{t}_i) dS + \sum_{i=1}^n \int (\mathbf{a}'_i, \delta \mathbf{t}_i) dS.$$

1) Wegen dieser Ableitung vgl. man z. B. R. Gans, Gött. Nachr. 1910. p. 225.

Nun ist

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \int (\mathbf{a}_i, \delta \mathbf{t}_i) &= \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{a}_i, \delta \operatorname{rot} \mathbf{h}_i) dS = \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{rot} \mathbf{a}_i, \delta \mathbf{h}_i) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{h}_i, \delta \mathbf{h}_i) dS = \delta T_i. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist<sup>1)</sup>

$$(18) \quad \int (\mathbf{a}'_i, \delta \mathbf{t}_i) dS = (\mathbf{h}'_i, \delta \mathbf{m}_i),$$

somit

$$(19) \quad \delta T = \delta \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i=1}^n (\mathbf{h}'_i, \delta \mathbf{m}_i).$$

Um die Resultate in der einfachsten Form zu gewinnen, wollen wir voraussetzen, daß so wenige Magnetonen in der Volumeneinheit sind, daß die molekularen magnetischen Felder unberücksichtigt bleiben können. Dann bedeutet  $\mathbf{h}'_i$  in (12) und (19) einfach das äußere Feld  $\mathbf{H}$ , und wir erhalten

$$(12') \quad T = \sum_{i=1}^n T_i + \frac{1}{2} (\mathbf{H}, \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i),$$

$$(19') \quad \delta T = \delta \sum_{i=1}^n T_i + (\mathbf{H}, \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{m}_i).$$

Zur Berechnung der Verteilungsfunktion, welche die Orientierung der Magnetonen bestimmt, führen wir in die Energie  $W = T$  die Eulerschen Winkel  $\varepsilon, \psi, \varphi$  ein, wenn  $\varepsilon$  die Neigung der Figurennachse gegen die im Raum feste Richtung  $\zeta$ , die zugleich die Richtung des Feldes  $H$  sein soll,  $\psi$  die sogenannte Länge der Knotenlinie,  $\varphi$  den Azimutwinkel des „Kreisels“ bedeutet.<sup>2)</sup>

$T$  setzt sich nach (12') für jedes Magnetton aus zwei Termen additiv zusammen, von denen der erste  $T_i$  die Eigenenergie, der zweite  $\frac{1}{2} H m_\zeta$  die wechselseitige Energie zwischen Magnetton und äußerem Magnetfelde bedeutet.

$T_i$  ist eine quadratische Funktion der  $\dot{\varepsilon}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$  und kann als elektromagnetisch gedeutete kinetische Energie betrachtet werden.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß zwei der elektromagnetischen Hauptträgheitsmomente  $A$  und  $B$  ein-

1) Vgl. wiederum R. Gans, Gött. Nachr. 1910. p. 226.

2) Vgl. R. Gans, Gött. Nachr. 1911. p. 5.

ander gleich sind. Wir betonen aber — und das ist für das Folgende von ausschlaggebender Bedeutung —, daß deshalb das Magnetton geometrisch kein Rotationskörper zu sein braucht. Eine Säule mit quadratischer Grundfläche hat z. B. zwei gleiche Hauptträgheitsmomente, aber keine Figurennachse. (Wir setzen „Figurennachse“ hier und im folgenden äqual geometrischer Rotationsachse zum Unterschied von „Rotationsachse“, das stets die mechanische Rotationsachse bedeuten soll.)

Heißt das dritte Hauptträgheitsmoment  $C$ , so ist die doppelte Eigenenergie des Teilchens

$$(20) \quad 2T_1 = A(\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \varepsilon) + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \varepsilon)^2.$$

Dazu kommt die Eigenenergie  $T_0$  des Massensystems, welches das äußere Feld  $H$  erzeugt — etwa, wie Kroo das auch annimmt, einer geladenen, rotierenden, makroskopischen Kugel. Diese hat die Form

$$(21) \quad 2T_0 = \alpha H^2,$$

wo  $\alpha$  eine Konstante bedeutet.

Schließlich ist nach (12') die wechselseitige Energie  $T_{01}$  gegeben durch

$$(22) \quad 2T_{01} = Hm_c = H(m_x \sin \varphi \sin \varepsilon + m_y \cos \varphi \sin \varepsilon + m_z \cos \varepsilon),$$

unter  $x, y, z$  die Hauptträgheitsachsen verstanden.

Nun ist aber, wenn  $e/m$  die elektromagnetisch gemessene spezifische Ladung eines Elektrons,  $p, q, r$  die Rotationsgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsachsen bedeuten,

$$(23) \quad \begin{cases} m_x = A \frac{e}{2m} p = A \frac{e}{2m} (\dot{\psi} \sin \varepsilon \sin \varphi + \dot{\varepsilon} \cos \varphi), \\ m_y = A \frac{e}{2m} q = A \frac{e}{2m} (\dot{\psi} \sin \varepsilon \cos \varphi - \dot{\varepsilon} \sin \varphi), \\ m_z = C \frac{e}{2m} r = C \frac{e}{2m} (\dot{\psi} \cos \varepsilon + \dot{\phi}), \end{cases}$$

so daß (22) in

$$(24) \quad 2T_{01} = H \frac{e}{2m} [A \dot{\psi} \sin^2 \varepsilon + C(\dot{\psi} \cos \varepsilon + \dot{\phi}) \cos \varepsilon]$$

übergeht.

Für ein einzelnes Magnetton im Magnetfelde  $H$  ist somit die Energie  $W$  gegeben durch

$$(25) \quad \begin{cases} 2W = A(\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \varepsilon) + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \varepsilon)^2 + \alpha H^2 \\ \quad + H \frac{e}{2m} [A \dot{\psi} \sin^2 \varepsilon + C(\dot{\psi} \cos \varepsilon + \dot{\phi}) \cos \varepsilon]. \end{cases}$$

In diesem Ausdruck ist das äußere Magnetfeld  $H$  auch eine verallgemeinerte Geschwindigkeit, was ja sofort einleuchtet, wenn das Feld durch eine elektrisch geladene rotierende Kugel erzeugt wird.

So sehen wir, daß  $W$  in der Tat eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ist.

Aus (25) ergeben sich die Impulse, die man in der statistischen Mechanik braucht, in folgender Form

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\partial W}{\partial \dot{\epsilon}} = A \dot{\epsilon}, \\ \Psi = \frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}} = A \dot{\psi} \sin^2 \epsilon + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \epsilon) \cos \epsilon \\ \qquad \qquad \qquad + H \frac{e}{2m} (A \sin^2 \epsilon + C \cos^2 \epsilon), \\ \Phi = \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \epsilon) + H \frac{e}{2m} C \cos \epsilon, \\ H = \frac{\partial W}{\partial H} = \alpha H + \frac{e}{2m} [A \dot{\psi} \sin^2 \epsilon + C(\dot{\psi} \cos \epsilon + \dot{\varphi}) \cos \epsilon]. \end{array} \right.$$

Da nun das äußere Feld  $H$  konstant sein soll, d. h. unbeeinflußt durch die Magnetonenbewegung, so muß die Trägheit der geladenen Kugel, deren Rotation es erzeugt, groß sein, so daß die vierte Gleichung (26) mit genügender Näherung in

$$(27) \quad H = \alpha H$$

übergeht.

Führen wir nun in (26) als neue Variable die Größen

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = A p = A(\dot{\psi} \sin \epsilon \sin \varphi + \dot{\epsilon} \cos \varphi), \\ Q = A q = A(\dot{\psi} \sin \epsilon \cos \varphi + \dot{\epsilon} \sin \varphi), \\ R = C r = C(\dot{\psi} \cos \epsilon + \dot{\varphi}) \end{array} \right.$$

ein, worin  $p, q, r$  die Drehgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsachsen sind, so erhalten wir

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = P \cos \varphi - Q \sin \varphi, \\ \Psi = (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \sin \epsilon + R \cos \epsilon \\ \qquad \qquad \qquad + H \frac{e}{\alpha 2m} (A \sin^2 \epsilon + C \cos^2 \epsilon), \\ \Phi = R + \frac{H}{\alpha} \frac{e}{2m} C \cos \epsilon, \\ H = H, \end{array} \right.$$

so daß das Volumelement des Phasenraumes

$$(30) \quad d\Omega' = d\varepsilon d\varphi d\psi dE d\Psi d\Phi dH$$

$$(31) \quad d\Omega' = A d\varepsilon d\varphi d\psi dP dQ dR dH = A d\Omega$$

übergeht, wo  $A$  die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon \sin \varphi & \sin \varepsilon \cos \varphi & \cos \varepsilon & \frac{e}{2m\alpha} (A \sin^2 \varepsilon + C \cos^2 \varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e}{2m\alpha} C \cos \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \varepsilon$$

ist, so daß aus (31)

$$(32) \quad d\Omega' = \sin \varepsilon d\Omega$$

wird.

Dabei dürfen wir in (30) und (31) den Faktor  $dH$  noch fortlassen, da  $H$  für das ganze statistische Problem als konstanter Parameter zu betrachten ist. Es ist somit

$$(32') \quad d\Omega' = \sin \varepsilon d\varepsilon d\varphi d\psi dP dQ dR = \sin \varepsilon d\Omega.$$

Die Energie eines Teilchens drückt sich in den  $P, Q, R$  nach (12') folgendermaßen aus:

$$W_1 + W_{01} = \frac{P^2 + Q^2}{2A} + \frac{R^2}{2C} + \frac{1}{2} H \frac{e}{2m} [P \sin \varphi \sin \varepsilon + Q \cos \varphi \sin \varepsilon + R \cos \varepsilon].$$

Die Verteilungsfunktion der Magnetonen sei  $f(\varepsilon, \varphi, \psi, E, \Psi, \Phi, H)$ ; d. h.  $f d\Omega'$  bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Magneton im Volumenelement  $d\Omega'$  des Phasenraumes liege.  $N$  sei die Anzahl Magnetonen in der Masseneinheit.

Dann ist

$$(33) \quad \int f \sin \varepsilon d\Omega = 1$$

oder

$$(34) \quad \int \delta f \cdot \sin \varepsilon d\Omega = 0.$$

Ferner muß

$$(35) \quad \delta \int f \cdot \log f \cdot d\Omega' = \int (\log f + 1) \delta f \cdot \sin \varepsilon d\Omega = 0$$

sein, als Ausdruck dafür, daß die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ein Maximum ist, und schließlich muß die Energie konstant, d. h.  $\delta W = 0$  sein.

Nach (19') bedeutet das aber

$$(36) \quad \left\{ \int \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{P^2}{A} + \frac{Q^2}{C} + \frac{R^2}{B} \right) + H b (P \sin \varphi \sin \epsilon + Q \cos \varphi \sin \epsilon + R \cos \epsilon) \right\} \delta f \sin \epsilon d\Omega = 0, \right.$$

wo, wie dauernd im folgenden, zur Abkürzung

$$(37) \quad b = \frac{e}{2m}$$

gesetzt ist.

Aus (34), (35) und (36) ergibt sich in bekannter Weise

$$(38) \quad f = a e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{P^2}{A} + \frac{Q^2}{C} + \frac{R^2}{B} \right) + H b (P \sin \varphi \sin \epsilon + Q \cos \varphi \sin \epsilon + R \cos \epsilon) \right\}},$$

wo  $a$  eine Konstante ist, die sich durch (33) bestimmt.

Aus  $f$  berechnet sich das magnetische Moment der Masseneinheit  $S$  zu

$$(39) \quad S = N \frac{\int b (P \sin \varphi \sin \epsilon + Q \cos \varphi \sin \epsilon + R \cos \epsilon) e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \right\}} \sin \epsilon d\Omega}{\int e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \right\}} \sin \epsilon d\Omega},$$

oder, wenn wir das Zustandsintegral  $Z$  durch

$$(40) \quad Z = \int e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \right\}} \sin \epsilon d\Omega,$$

einführen,

$$(41) \quad S = - \frac{N k T}{H} \frac{d \log Z}{d \log b}$$

und somit die spezifische Suszeptibilität

$$(42) \quad \chi = - \frac{N k T}{H^2} \frac{d \log Z}{d \log b}.$$

Wir müssen aber mit Nachdruck betonen, daß die Gesetze der statistischen Mechanik nur auf diejenigen Koordinaten des Phasenraumes anwendbar sind, welche sich durch Zusammenstöße ändern, und die wir kurz als *statistische Koordinaten* bezeichnen wollen.

Die Drehung um die geometrische Figurennachse eines Rotationskörpers ist z. B. keine statistische Koordinate, da

durch Zusammenstöße ihre Geschwindigkeit sich nicht ändert; diese Drehgeschwindigkeit ist deshalb auch von der Temperatur gänzlich unabhängig.

Die Formeln (40) bis (42) sind somit nur richtig, wenn die Magnetonen keine Figurenachse besitzen. Damit steht nicht im Widerspruch, daß wir zwei Hauptträgheitsmomente im Interesse einfacherer Formeln als gleich angenommen haben.

Kroo bemerkte richtig, daß die Übergangsfelder im Rahmen der statistischen Mechanik ganz wegfallen, d. h. die Bewegungen, welche durch die Felderzeugung auftreten, kommen nicht in Frage, da nachher bei konstantem Felde ein stationärer Zustand sich einstellt, der von den früheren Ereignissen ganz unabhängig ist.

Einschränkend fügen wir aber hinzu, daß das nur für die statistischen Koordinaten des Phasenraumes gilt, die durch die thermische Agitation beeinflußt werden.

Wir haben noch zu untersuchen, wie die Formeln für die magnetische Energie, das Zustandsintegral und die spezifische Suszeptibilität in dem Falle lauten, daß das Magnetton eine Figurenachse besitzt.

Die magnetische Energie hat natürlich als Funktion der Drehgeschwindigkeiten den durch Gleichung (12') angegebenen Wert

$$(43) \quad W = T = \frac{A}{2}(p^2 + q^2) + \frac{C}{2}r^2 + \frac{1}{2}(H_x m_x + H_y m_y + H_z m_z)$$

Ist die  $z$ -Achse Figurenachse des Körpers, so ist, wie wir früher gezeigt haben<sup>1)</sup>

$$(44) \quad r = r_0 - b H_z,$$

wo  $r$  die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse im Felde,  $r_0$  dieselbe außerhalb des Feldes bedeutet und  $b$  durch (37) definiert ist.

Ferner ist

$$(45) \quad m_z = b C r; \quad m_{0z} = b C r_0$$

die  $z$ -Komponente des magnetischen Momentes im Felde bzw. außerhalb des Feldes.

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. p. 217. Formel (84).

So ergibt sich

$$\frac{C}{2} r^2 = \frac{C}{2} r_0^2 - C r_0 b H_z + \frac{C}{2} b^2 H_z^2 = \frac{C}{2} r_0^2 - m_{0z} H_z + \frac{C}{2} b^2 H_z^2$$

$$\frac{1}{2} H_z m_z = \frac{1}{2} H_z m_{0z} - \frac{C}{2} b^2 H_z^2,$$

so daß (43) in

$$(46) \quad W = T = \frac{A}{2} (p^2 + q^2) + \frac{C}{2} r_0^2 + \frac{1}{2} (H_z m_z + H_y m_y - H_z m_{0z})$$

übergeht.

Wir sehen also, daß die nicht statistische Koordinate  $r$  zwar nicht von der Temperatur abhängt, wohl aber nach (44) von  $H$ . Das erklärt sich durch die Reaktion auf die Felderzeugung.  $r_0$  ist eine absolute Konstante, ebenso das Moment  $m_{0z}$ , das wir im folgenden mit  $\mu$  bezeichnen wollen.

Vergleichen wir (46) mit (12'), so sind die Unterschiede die, daß in (46)  $r_0$  eine Konstante ist, also auch der Impuls  $R$  nicht als Koordinate des Phasenraumes auftritt, daß ferner  $m_{0z} = \mu$  konstant ist, und daß das Vorzeichen des Gliedes  $\frac{1}{2} m_{0z} H_z$  negativ ist.

Deshalb wird für diesen Fall das Zustandsintegral

$$(47) \quad Z' = \int e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \frac{P^2+Q^2}{2A} + H b (P \sin \varphi \sin \varepsilon + Q \cos \varphi \sin \varepsilon) \right\} + \frac{\mu H}{kT} \cos \varepsilon} \sin \varepsilon d\Omega,$$

wo  $d\Omega = d\varepsilon d\varphi dP dQ$  ist.

Die spezifische Magnetisierung hat den Wert

$$(48) \quad S = N \frac{\int [b(P \sin \varepsilon \sin \varphi + Q \sin \varepsilon \cos \varphi) + \mu \cos \varepsilon] e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \frac{P^2+Q^2}{2A} + \frac{\mu H}{kT} \cos \varepsilon \right\}} \sin \varepsilon d\Omega}{\int e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \frac{P^2+Q^2}{2A} + \frac{\mu H}{kT} \cos \varepsilon \right\}} \sin \varepsilon d\Omega}$$

oder

$$(49) \quad S = \frac{N k T}{H} \left( \frac{d \log Z'}{d \log \mu} - \frac{d \log Z'}{d \log b} \right)$$

und

$$(50) \quad \chi = \frac{N k T}{H^2} \left( \frac{d \log Z'}{d \log \mu} - \frac{d \log Z'}{d \log b} \right).$$

Da Kroo den oben erwähnten Unterschied zwischen statistischen und nicht statistischen Koordinaten nicht beachtet, so sind seine Resultate fehlerhaft, insbesondere, wie

wir sehen werden, seine Behauptung, man könne den Paramagnetismus auf Grund der Prinzipien der statistischen Mechanik nicht verstehen.

Ferner strahlt ein elektrisch geladener Rotationskörper infolge seiner Drehung um die Figurennachse keine Energie aus, wie ich früher gezeigt habe.<sup>1)</sup> Somit bleibt das magnetische Moment, welches dieser Rotation entspricht, dauernd konstant, da auch die thermische Agitation die Rotation um die Figurennachse als nicht statistische Koordinate nicht beeinflussen kann.

Dasselbe magnetische Moment wird deshalb auch beim absoluten Nullpunkt existieren, ohne daß wir damit sagen könnten, es gäbe eine Nullpunktsenergie, denn dieser Begriff hat sich für statistische Phänomene gebildet, bezieht sich aber nicht ohne weiteres auf Vorgänge, die von der Temperatur ganz unabhängig sind.

So scheinen Magnetonen mit Figurennachsen geeignet zu sein, die para- und ferromagnetischen Erscheinungen zu beschreiben, da die in der Einleitung geforderten Bedingungen, zeitliche Konstanz und Temperaturunabhängigkeit des magnetischen Momentes, durch dieses Modell gerade gewährleistet werden, und wir werden im vierten Paragraphen auch sehen, daß sie in der Tat paramagnetische Erregung geben.

### § 8. Diamagnetismus.

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß wenn keine Figurennachse existiert, die magnetische Erregung stets diamagnetisch ist, und werden sie als Funktion des Feldes und der Temperatur berechnen.

Die Ausgangsformeln bilden die Gleichungen (40) und (42). Zunächst berechnen wir

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} Z = \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dPe^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{P^2}{2A} + HbP \sin \vartheta \sin \varphi \right)} \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dQe^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{Q^2}{2A} + HbQ \sin \vartheta \cos \varphi \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} dRe^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{R^2}{2C} + HbR \cos \vartheta \right)} \end{array} \right.$$

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. p. 218.

Mit Benutzung der Formel<sup>1)</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mz^2 - 2nz} dz = e^{-\frac{n^2}{m}} \sqrt{\frac{\pi}{m}}$$

erhält man

$$(52) \quad Z = 4\pi^2 \sqrt{(2\pi k T)^3 A^3 C} \int_0^{\pi} \sin s ds e^{\frac{H^2 b^2}{2kT} (A \sin^2 s + C \cos^2 s)}$$

Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:  $A > C$  und  $A < C$ .

### 1. Fall: $A > C$ .

Führen wir in (52) die neue Variable  $x = \cos s$  ein, so wird

$$(53) \quad Z = 4\pi^2 \sqrt{\pi} \sqrt{(2\pi k T)^3 A^3 C} \frac{e^{\frac{H^2 b^2 A}{2kT}}}{Hb \sqrt{\frac{A-C}{2kT}}} \Phi\left(Hb \sqrt{\frac{A-C}{2kT}}\right),$$

unter  $\Phi$  das Fehlerintegral

$$(54) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

verstanden.

Setzen wir

$$(55) \quad \gamma^2 = \frac{H^2 b^2 (A - C)}{2kT},$$

so wird

$$(56) \quad Z = 4\pi^2 \sqrt{\pi} \sqrt{(2\pi k T)^3 A^3 C} \frac{e^{\frac{\gamma^2 A}{A-C}}}{\gamma} \Phi(\gamma)$$

und

$$(57) \quad \log Z = \text{const.} + \frac{A}{A-C} \gamma^2 - \log \gamma + \log \Phi(\gamma),$$

also nach (42)

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{NkT}{H^2} \left[ \frac{2A}{A-C} \gamma^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\gamma^2}}{\Phi(\gamma)} \right] \\ &= -Nb^2 A \left[ 1 + \frac{A-C}{2A} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}\gamma} \frac{e^{-\gamma^2}}{\Phi(\gamma)} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

1) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 5. Aufl. 1. p. 28. Braunschweig 1910.

Definieren wir schließlich die Funktion

$$(58) \quad \Omega(\gamma) = \frac{2}{V\pi\gamma e^{\gamma^2}} \Phi(\gamma) - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{3}$$

und setzen

$$(59) \quad h = \frac{3}{2} \frac{1 - C/A}{2 + C/A},$$

so wird

$$(60) \quad x = -Nb^2 \frac{2A+C}{3} [1 + h \Omega(\gamma)].$$

Bei konstanter Temperatur ist  $\gamma$  nach (55) der Feldstärke, bei konstantem Felde ist  $1/\gamma^2$  der absoluten Temperatur proportional.

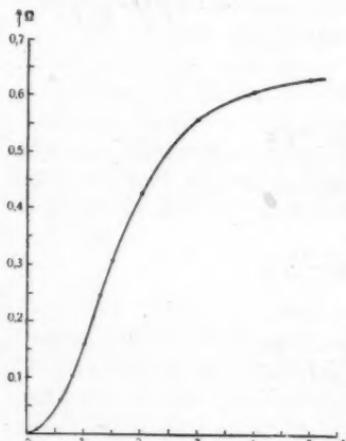


Fig. 1.

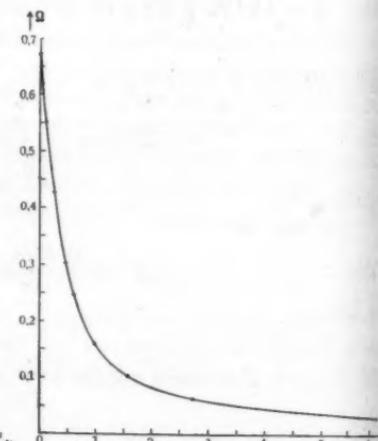


Fig. 2.

Mit Hilfe einer Tabelle für das Fehlerintegral<sup>1)</sup> haben wir  $\Omega$  berechnet und graphisch in den Figg. 1 und 2 als Funktion der Feldstärke und der Temperatur dargestellt.

1) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln. p. 31. Leipzig und Berlin 1909.

$\gamma$	$\frac{1}{\gamma^2}$	$\Omega$
0,0	$\infty$	0,0000
0,2	25,00	0,0067
0,4	6,250	0,028
0,6	2,777	0,063
0,8	1,563	0,106
1,0	1,000	0,1593
1,3	0,5917	0,2465
1,5	0,4444	0,3044
2,0	0,2500	0,4271
3,0	0,1111	0,5556
4,0	0,0625	0,6042
5,0	0,0400	0,6267
10,0	0,0100	0,6567
$\infty$	0,0000	0,6667

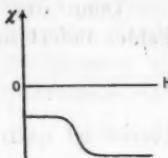


Fig. 3.

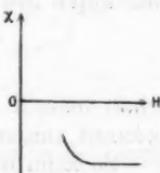


Fig. 4.

Nennen wir die spezifische Suszeptibilität für unendlich kleine Feldstärken  $\chi_0$ , also

$$(61) \quad \chi_0 = -Nb^2 \frac{2A + C}{3},$$

so wird

$$(60') \quad \frac{\chi - \chi_0}{\chi_0 h} = \Omega(\gamma).$$

Danach wird  $\chi$  vom Felde abhängig sein und als Funktion des Feldes einen Verlauf zeigen, wie ihn Fig. 3 darstellt.

In der Tat hat Honda<sup>1)</sup> eine Feldabhängigkeit bei vielen diamagnetischen Substanzen gefunden, die in ihrem Typus durch Fig. 4 dargestellt werden kann.

Es ist dringend erwünscht, die Beobachtungen für schwache Felder zu ergänzen, um zu sehen, ob die vollständige Kurve der Fig. 3 entspricht. Dabei wird man sein Augenmerk darauf zu richten haben, zu entscheiden, ob die Feldabhängigkeit, wie Honda vermutet, durch Eisenverunreinigung kommt oder nicht. Im letzteren Falle wäre unsere Theorie stark durch die Erfahrung gestützt und würde dazu beitragen, quantitative Angaben über die Konstitution eines diamagnetischen Körpers zu machen.

1) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. p. 1043. Fig. 5. 1910.

Denn die spezifische Suszeptibilität für sehr schwache Felder liefert nach (61)

$$N \frac{e^2}{4m^2} \frac{2A + C}{3}.$$

Ferner ist nach (60') und (59)

$$(62) \quad \frac{\chi_{\infty} - \chi_0}{\chi_0} = h \cdot \Omega(\infty) = \frac{2}{3} h = \frac{1 - C/A}{2 + C/A},$$

und durch den Maßstab des Argumentes

$$\gamma = \frac{He(A - C)}{4mkT}$$

erhält man  $A - C$ , wenn man die Werte von  $e/m$  und  $k$  als bekannt annimmt.

So kann man die Differenz und das Verhältnis der beiden Hauptträgheitsmomente und damit dieselben selbst bestimmen und die Anzahl Magnetonen im Gramm angeben.

Ist  $A = C$ , d. h. sind alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so wird  $h = 0$ , also

$$(63) \quad \chi = \chi_0 = -N b^2 A$$

vom Felde wie von der Temperatur unabhängig. Auch dieser Fall ist vielfach beobachtet worden.

Es sei übrigens bemerkt, daß wenn man  $A, B, C$  verschieden annimmt,  $\chi_0$  den Wert

$$\chi_0 = -N b^2 \frac{A + B + C}{8}$$

erhält.

Die Abhängigkeit von der absoluten Temperatur wird nach unserer Theorie durch eine Kurve vom Typus der Fig. 5 dargestellt, während die Hondaschen Beobachtungen<sup>1)</sup> Kurven von der Form der Fig. 6 geben. Diese zeigen die Tendenz, bei tiefen Temperaturen der  $T$ -Achse parallel zu werden. Doch müssen wir daran erinnern, daß wir nicht erwarten können, bei tiefen Temperaturen in Übereinstimmung mit der Theorie zu bleiben, die erstens Äquipartition voraussetzt und zweitens die molekularen Felder magnetischen Ursprungs vernachlässigt hat. Die in dieser Beziehung notwendigen Verbesserungen sollen in einer späteren Arbeit gemacht werden.

1) K. Honda, l. c. p. 1056 u. 1057.

Das beobachtete Verhalten der Suszeptibilität als Temperaturfunktion ist keinesfalls durch die Annahme von Eisenbeimengungen zu verstehen, da bei höherer Temperatur die Sättigung des Eisens geringer wird, also das Gemisch stärkeren Diamagnetismus aufweisen müßte.

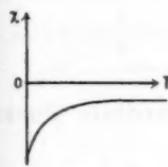


Fig. 5.

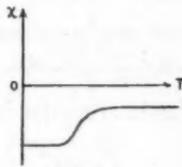


Fig. 6.

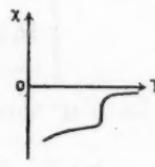


Fig. 7.

Bei Erhöhung der Temperatur beobachtet man häufig im Schmelzpunkt eine Unstetigkeit, wie z. B. bei Tellur, vom Charakter der Fig. 7. Diese erklärt sich zwanglos durch eine Explosion eines Magnetons, etwa in  $n$  geometrisch ähnliche, wodurch der Wert  $\chi_0$  seinem absoluten Betrage nach erniedrigt wird; denn  $N$  ist  $n$  proportional, während die Trägheitsmomente  $A$  und  $C$  der Größe  $n^{-\frac{1}{2}}$  proportional sind, so daß  $\chi_0$  dem Werte  $n^{-\frac{1}{2}}$  proportional sein wird.

Den Fall des Wassers, bei dem  $\chi$  mit wachsender Temperatur dem absoluten Werte nach zunimmt<sup>1)</sup>, kann man nicht ohne weiteres unserer Theorie des reinen Diamagnetismus einordnen (siehe jedoch Fig. 12); doch hat Piccard<sup>2)</sup> es wahrscheinlich gemacht, daß Wasser aus zwei verschiedenen Bestandteilen besteht, die bei verschiedenen Temperaturen in verschiedener Konzentration vorhanden sind, wodurch das Verhalten erklärt wäre.

### 2. Fall: $A < C$ .

Der Fall  $A < C$  gibt ganz ähnliche Resultate. Aus (52) erhalten wir durch die Substitution

$$(64) \quad \gamma_1^2 = \frac{H^2 b^2 (C - A)}{2 k T},$$

$$(65) \quad Z = 8 \pi^2 \sqrt{(2 \pi \hbar T)^3 A^2 C} \frac{e^{\frac{A}{C-A} \gamma_1^2}}{\gamma_1} \int_0^\infty e^{\gamma_1^2} d\tau,$$

1) P. Weiss u. A. Piccard, Compt. rend. 155. p. 1234. 1912.

2) A. Piccard, Compt. rend. 155. p. 1497. 1912.

so daß  $\chi$  nach (42) den Wert annimmt

$$(66) \quad \chi = -Nb^2 \frac{2A+C}{3} [1 + h_1 \Omega_1(\gamma_1)].$$

Hier bedeutet

$$(67) \quad \begin{cases} h_1 = \frac{3}{2} \frac{1-A/C}{1+2A/C} \\ \Omega_1(\gamma_1) = \frac{1}{\gamma_1 e^{-\gamma_1^2} \int_0^{\gamma_1} e^{-\tau^2} d\tau} - \frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Da mir keine Tafeln für die transzendenten Funktion

$$\int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

zur Verfügung standen, habe ich dieselbe folgendermaßen numerisch berechnet.

Die Funktion

$$(68) \quad J = e^{-x^2} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

genügt der Differentialgleichung

$$(69) \quad \frac{dJ}{dx} + 2xJ = 1$$

mit der Nebenbedingung

$$(70) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } J = 0.$$

Setzt man für  $J$  eine nach Potenzen von  $x^2$  fortschreitende Reihe an, so folgt

$$(71) \quad J = x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\nu! (2x)^{2\nu}}{(2\nu+1)!},$$

die für alle Werte von  $x$  konvergent ist.

Führt man (71) in (67) ein, so erhält man die Reihe

$$(72) \quad \Omega_1(\gamma_1) = \frac{4}{45} \cdot 2\gamma_1^2 \left[ 1 + \frac{2\gamma_1^2}{21} - \frac{(2\gamma_1^2)^2}{315} - \frac{(2\gamma_1^2)^3}{2079} + \dots \right],$$

die auch für alle Werte von  $\gamma_1$  konvergiert, aber für große Argumente praktisch nicht brauchbar ist.

Deshalb habe ich außerdem für  $J$  die formal genügende Reihe<sup>1)</sup>

$$(73) \quad J = \frac{1}{2x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{\nu! (2x)^{2\nu}} + c e^{-x^2}$$

1) Leider ist mir der Nachweis nicht gelungen, daß die Reihe semikonvergent ist.

entwickelt. Die Integrationskonstante  $c$  bestimmt sich durch (70), ist aber für große Werte von  $x$  nicht von Interesse.

So ergibt sich die Reihe

$$(74) \quad Q_1(\gamma_1) = \frac{4}{3} - \frac{4}{2\gamma_1^2} \left[ 1 + \frac{1}{2\gamma_1^2} + \frac{5}{(2\gamma_1^2)^2} + \frac{37}{(2\gamma_1^2)^3} + \dots \right].$$

Auf diese Weise berechnete ich die Tabelle

$\gamma_1$	$\frac{1}{\gamma_1^2}$	$Q_1$
0,0	$\infty$	0,0000
0,5	4	0,0455
0,7071	2	0,0928
1,0	1	0,1918
1,225	0,6667	0,2940
1,581	0,400	0,4940
2,237	0,200	0,859
3,162	0,100	1,119
$\infty$	0,000	1,333

Die Figg. 8 und 9 geben  $Q_1$  als Funktion von  $\gamma_1$  bzw. von  $1/\gamma_1^2$ , d. h. Kurven, die nach (66) die Größe  $(\chi - \chi_0)/\chi_0 h_1$  als Funktion des Feldes bzw. der Temperatur darstellen.

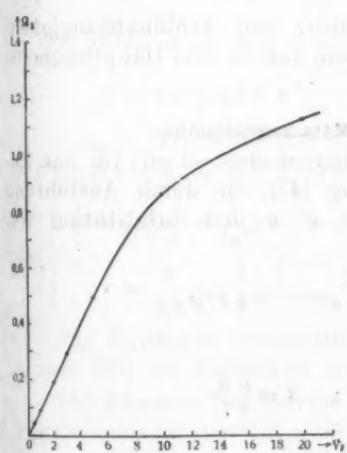


Fig. 8.

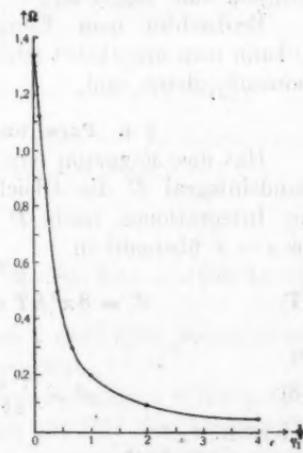


Fig. 9.

D  
lage,  
besteh  
Elekt  
D  
unser  
zeugte  
magne  
Lang  
mus, v  
weise  
stets  
Träghe  
N  
 $Z'$  in  
D  
stituti  
(79)  $\dots$   
unter  
W  
(80)  
in (79)  
(81)  
daß d  
(82)  $\dots$   
F  
a nach  
D  
Funkt  
der s

Diese Kurven haben denselben Typus wie die in Figg. 1 und 2 gezeichneten; somit gelten auch für diesen Fall alle qualitativen Bemerkungen über das Verhalten der spezifischen Suszeptibilität.

Für  $A = C$  wird nach (67)  $h_1 = 0$ , also nach (66)

$$(75) \quad \chi_0 = - N b^2 A$$

wie im Falle  $A > C$  [vgl. (63)], d. h. die Suszeptibilität hängt weder vom Felde noch von der Temperatur ab.

Es erübrigt wohl, noch einmal darauf hinzuweisen, daß Formel (75) zwar voraussetzt, daß alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, daß das Magnetom aber trotzdem keine Kugel sein darf, weil die Grundbedingung unserer Behandlung war, daß die Drehungen um die drei Hauptträgheitsachsen statistische seien.

Hat das Magnetom Kugelform, so liegt das Problem außerhalb des Bereiches der statistischen Mechanik; es ist ein rein elektromagnetisches, das wir früher bereits behandelt haben.<sup>1)</sup> Es ergibt sich nach Formel (81) der zitierten Arbeit

$$(76) \quad \chi = - N b^2 A.$$

Merkwürdigerweise erhalten wir also genau dasselbe Resultat, sei es, daß das Magnetom Kugelform hat, oder daß es zwar von dieser Gestalt abweicht, daß aber das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist.

Beobachtet man Temperatur- und Feldunabhängigkeit, so kann man umgekehrt schließen, daß die drei Hauptträgheitsmomente gleich sind.

#### § 4. Para- und Metamagnetismus.

Hat das Magnetom eine Figurennachse, so gilt für das Zustandsintegral  $Z'$  die Gleichung (47), die durch Ausführung der Integrationen nach  $P$ ,  $Q$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  und Substitution von  $\cos \varepsilon = x$  übergeht in

$$(77) \quad Z' = 8\pi^3 k T A \int_{-1}^{+1} e^{\alpha^2(1-x^2)} e^{\beta x} dx,$$

wo

$$(78) \quad \alpha^2 = \frac{H^2 b^2 A}{2kT}; \quad \beta = \frac{\mu H}{kT}$$

bedeuten.

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. p. 215.

Die Langevinsche Theorie hat die Annahme zur Grundlage, daß das Magneton aus einem permanenten Magneten besteht, während wir ein um seine Figurenachse rotierendes Elektronensystem zugrunde legen.

Der Unterschied beider Standpunkte ist der, daß nach unserer Auffassung die durch die thermische Agitation erzeugten Rotationen um zwei äquatoriale Trägheitsachsen diamagnetische Erregung hervorrufen muß, während diese bei Langevin fehlt. Nach ihm gibt es also reinen Paramagnetismus, während in unserer elektronentheoretischen Behandlungsweise der Paramagnetismus (Rotation um die Figurenachse) stets mit Diamagnetismus (Rotation um die anderen beiden Trägheitsachsen) vermischt auftreten muß.

Nur in dem Grenzfall  $\lim a = 0$  bei endlichem  $\beta$  geht  $Z'$  in das Zustandsintegral der Langevinschen Theorie über.

Die Integration in (77) nach  $x$  ergibt mittels der Substitution  $a x - \beta/2a = y$

$$(79) \quad Z' = 4\pi^3 \sqrt{\pi k T A} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}}}{a} \left[ \Phi\left(\frac{\beta}{2a} + a\right) - \Phi\left(\frac{\beta}{2a} - a\right) \right],$$

unter  $\Phi$ , wie in (54) das Fehlerintegral verstanden.

Wir führen die reine Temperaturfunktion

$$(80) \quad \tau^2 = \frac{\beta^2}{4a^2} = \frac{\mu^2}{2b^2 A k T}$$

in (79) neben  $a$  ein und erhalten

$$(81) \quad Z' = 4\pi^3 \sqrt{\pi k T A} \frac{e^{a^2 + \tau^2}}{a} [\Phi(\tau + a) - \Phi(\tau - a)].$$

Nach (50) ergibt sich dann, wenn wir berücksichtigen, daß  $d \log \tau = d \log \mu - d \log b$ ;  $d \log a = d \log b$  ist,

$$(82) \quad \begin{cases} G = \frac{\chi}{N b^2 A} = \frac{1}{2a^2} [4\tau^2 - 2a^2 + 1 \\ \quad - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-(\tau^2 + a^2)}}{\Phi(\tau + a) - \Phi(\tau - a)} (2\tau \sin 2a\tau + a \cos 2a\tau)] \end{cases}$$

Für konstante Temperatur ist  $\tau$  nach (80) konstant und  $a$  nach (78) der Feldstärke proportional.

Die folgende Tabelle, die für verschiedene  $\tau$ -Werte  $G$  als Funktion von  $a$  darstellt, gibt also ein Bild der Abhängigkeit der spezifischen Suszeptibilität „paramagnetischer“ Körper

von der Feldstärke. Die Resultate sind graphisch in Fig. 10 dargestellt.

Die Größe  $G$ .

$\alpha$	$\tau = 0$	$\tau = \frac{1}{2}$	$\tau = 1$	$\tau = 2$
0,0	- 0,667	- 0,500	0,000	+ 2,00
0,2	- 0,670	- 0,505	- 0,010	+ 1,92
0,4	- 0,681	- 0,514	- 0,040	+ 1,69
0,6	- 0,698	- 0,535	- 0,082	+ 1,348
0,8	- 0,719	- 0,560	- 0,135	+ 1,093
1,0	- 0,746	- 0,591	- 0,1915	+ 0,900
1,3	- 0,7899	- 0,644	- 0,279	+ 0,666
1,5	- 0,8189	- 0,682	- 0,339	+ 0,536
2,0	- 0,8802	- 0,773	- 0,488	+ 0,278
3,0	- 0,9444	- 0,889	- 0,723	- 0,143
4,0	- 0,9687	- 0,937	- 0,844	- 0,471
5,0	- 0,9800	- 0,960	- 0,900	- 0,660
10,0	- 0,9950	- 0,990	- 0,975	- 0,915
$\infty$	- 1,0000	- 1,000	- 1,000	- 1,000

Für  $\tau = 0$  müssen wir das Resultat erhalten, das sich für  $\mu = 0$  ergibt, d. h. der Paramagnetismus der Figurenachse ist Null, und es bleibt nur der Diamagnetismus der anderen beiden Trägheitsachsen.

Demnach muß  $G$  für  $\tau = 0$  in den Wert von  $G$  übergehen, den es nach (60) für  $C = 0$  annimmt, nämlich

$$G = -\frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{3}{4} \Omega \left( H b \sqrt{\frac{A}{2kT}} \right) \right].$$

Das ist in der Tat der Fall.

Für  $\tau = \frac{1}{2}$  überwiegt noch der Diamagnetismus bei allen Feldern; auch noch für  $\tau = 1$ , wo der Körper bei schwachem Felde magnetisch indifferent erscheint. Für  $\tau = 2$  ist die

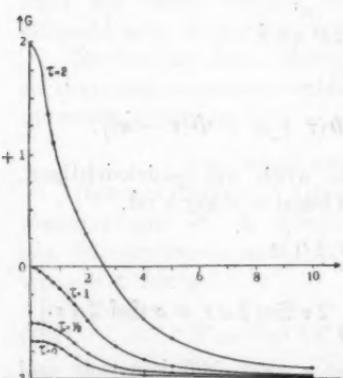


Fig. 10.

Substanz bei kleinen Feldern paramagnetisch, bei großen diamagnetisch.

Ein solches Verhalten ist von R. H. Weber und seinem Schüler Kurt Overbeck<sup>1)</sup> an Kupfer-Zinklegierungen beobachtet und mit dem Namen Metamagnetismus belegt worden. Man sieht dasselbe Phänomen auch bei dem von Honda<sup>2)</sup> untersuchten Indium; doch gebührt Weber und Overbeck das Verdienst, daß sie klar erkannt und nachgewiesen haben, daß es sich nicht ohne weiteres um eine Verunreinigung durch Eisen handelt.

Auch die von Honda beobachteten Kurven paramagnetischer Substanzen in ihrer Feldabhängigkeit<sup>2)</sup> zeigen denselben Verlauf wie die von uns gezeichnete.

Alle Kurven (vgl. Fig. 10) nähern sich für  $\lim \alpha = \infty$ , d. h. für große Felder asymptotisch dem Werte -1, d. h. die sogenannten paramagnetischen Materialien sind sämtlich metamagnetisch.

Eine Ausnahme bildet der Grenzfall, daß  $\lim \alpha = 0$ ,  $\lim \tau = \infty$  wird; doch so, daß  $\beta = 2\alpha\tau$  endlich bleibt.

Dann geht nämlich  $\chi$  in die Langevinsche Funktion

$$(83) \quad \chi = \frac{N\mu}{H} \left( \text{Ctg } \beta - \frac{1}{\beta} \right)$$

über, die reinen Paramagnetismus repräsentiert und stets gültig sein wird, wenn die paramagnetischen Rotationen um die Figurennachse sehr groß im Vergleich mit der durch die Molekularbewegung erzeugten (diamagnetischen) Rotation um die beiden äquatorialen Trägheitsachsen ist.

Durch Steigerung der Temperatur und der Feldstärke muß es nach unserer Theorie stets möglich sein, den Körper diamagnetisch zu machen.

Es sei übrigens bei dieser Gelegenheit, wo es sich um die Diskussion der Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Feldstärke ohne Hysteresis handelt, darauf hingewiesen, daß Cohn<sup>3)</sup> für diesen Fall die Kräfte entwickelt hat.

Mißt man z. B. die Kraftwirkung  $F$  auf einen Körper im ungleichförmigen Felde mit einer Versuchsanordnung, wie sie Curie, Weiss, Weber und Overbeck benutzt haben,

1) K. Overbeck, l. c.

2) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. p. 1043. Fig. 5. 1910.

3) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. p. 523. Leipzig 1900.

so ist

$$F = S \cdot m \cdot \frac{\partial H_0}{\partial x},$$
(87)

wo  $S = \chi H$  die spezifische Magnetisierung,  $m$  die Masse der Substanz,  $\partial H_0 / \partial x$  den Gradienten des Feldes bedeutet, ehe das magnetische Material hineingebracht war.

Ist der Körper nur schwach magnetisch, so darf man  $H = H_0$  setzen und erhält

$$F = \chi \cdot m H_0 \frac{\partial H_0}{\partial x}.$$

Die Kurven der Fig. 10 sind zwar Isothermen, da für konstantes  $T$  auch  $\tau$  konstant und  $\alpha$  dem Felde  $H$  proportional ist; aber eine Parallele zur Ordinatenachse schneidet die Kurvenschar in Punkten, die konstantem  $a$ , aber nicht kontantem  $H$  entsprechen.

Deshalb ist es wünschenswert, die Größen

$$(84) \quad \alpha^2 = \frac{H^2 b^2 A}{2 k T}; \quad \tau^2 = \frac{\mu^2}{2 b^2 A k T}$$

durch die folgenden

$$(85) \quad h = \frac{\alpha}{\tau} = \frac{b^2 A}{\mu} H; \quad \Theta = \frac{1}{\tau^2} = \frac{2 b^2 A k}{\mu^2} T$$

zu ersetzen, da dann  $h$  von  $T$  unabhängig und  $H$  proportional,  $\Theta$  von  $H$  unabhängig und  $T$  proportional ist.

Dann lautet (82)

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \frac{\chi}{N b^2 A} = \frac{\Theta}{2 h^2} \left[ 1 + \frac{4 - 2 h^2}{\Theta} \right] \\ \qquad - \frac{4}{V^\pi} \frac{s - \frac{h^2 + 1}{\Theta}}{\Phi \left( \frac{h+1}{V\Theta} \right) + \Phi \left( \frac{h-1}{V\Theta} \right)} \left( \frac{2}{V\Theta} \sin \frac{2h}{\Theta} + \frac{h}{V\Theta} \cos \frac{2h}{\Theta} \right) \end{array} \right.$$

Spezielle Werte sind

für $\Theta = 0$ wird $G = -1 + \frac{2}{h^2}$	für $h = 0$ wird $G = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Theta} - 1 \right)$
" $\Theta = \infty$ " $G = -\frac{2}{3}$	" $h = \infty$ " $G = -1$ .

Substituiert man den Wert von  $\Theta$  in die Formel

$$\lim_{h=0} G = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Theta} - 1 \right),$$

so erhält man

$$(87) \quad \lim_{H=0} \chi = \frac{1}{3} \frac{N\mu^2}{kT} - \frac{2}{3} Nb^2 A,$$

d. h. für kleine Feldstärken ist die Suszeptibilität die algebraische Summe des der absoluten Temperatur umgekehrt proportionalen Paramagnetismus nach Langevin und des von der Temperatur unabhängigen Diamagnetismus, welcher den thermischen Rotationen um die äquatorialen Hauptträgheitsachsen entspricht.

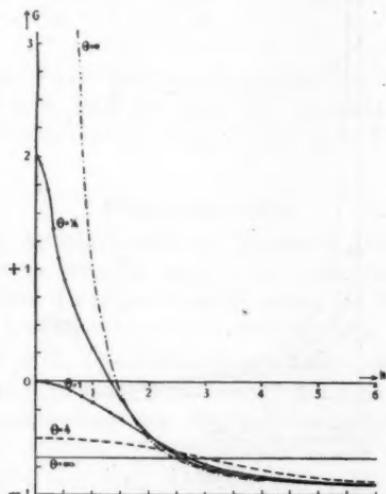


Fig. 11.

Fragen wir uns nach dem inneren Grunde, warum für schwache Felder nach (87) der Diamagnetismus von der Temperatur unabhängig, der Paramagnetismus dagegen ihr umgekehrt proportional ist, so erkennen wir, daß die diamagnetischen Momente mit der Temperatur wachsen, die Richtbarkeit derselben im Felde aber abnimmt; dagegen bleibt das paramagnetische Moment konstant und ergibt bei höheren Temperaturen wegen der geringeren Richtbarkeit eine kleinere Suszeptibilität.

In Fig. 11 haben wir  $G$  als Funktion von  $h$  für verschiedene Werte von  $\Theta$  gezeichnet, d. h. diese Figur stellt

die Isothermen dar. Sie ergab sich einfach aus der Tabelle p. 172 und für  $\Theta = 0$  aus der soeben angegebenen Beziehung

$$\lim_{\Theta=0} G = -1 + \frac{2}{h^2}.$$

Schnitte durch diese Figur parallel der Ordinatenachse ergeben die Fig. 12, welche die Suszeptibilität als Funktion der Temperatur bei konstantem Felde darstellt.

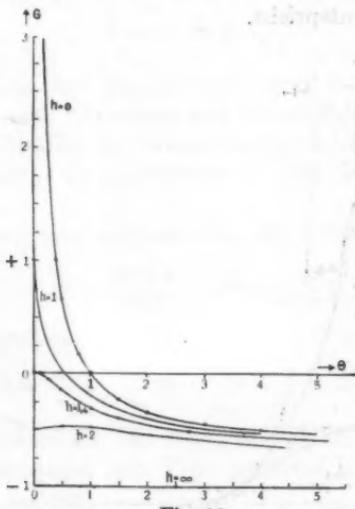


Fig. 12.

Speziell haben wir noch, um die Kurvenschar zu vervollständigen,  $G$  für  $h = 0$  nach der Formel

$$\lim_{h=0} G = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Theta} - 1 \right)$$

und für  $h = 1,4$  nach (86) berechnet, wie die folgende Tabelle zeigt.

Wir sehen, daß bei tiefen Temperaturen ein Maximum auftritt, wie Kamerlingh Onnes und Perrier<sup>1)</sup> es tatsächlich bei Sauerstoff und wasserfreiem Eisensulfat beobachtet haben.

1) H. Kamerlingh Onnes u. A. Perrier, Leiden Com. Nr. 124. Nov. 1911.

$\tau$	$\Theta$	$G$ für $h = 1,4$
0,0	$\infty$	-0,6667
0,4	6,25	-0,5899
0,8	1,56	-0,3993
1,0	1,00	-0,3081
1,5	0,445	-0,1500
2,0	0,250	-0,0639
3,0	0,111	+0,0083
5,0	0,040	+0,0234
$\infty$	0,000	+0,0204

Eine Eigenschaft der metamagnetischen Stoffe muß es nach Fig. 12 sein, daß sie auch bei konstantem Felde und wachsenden Temperaturen vom Para- zum Diamagnetismus übergehen.

#### Zusammenfassung.

Unter der Annahme, daß ein Magneton aus einem starren Elektronensystem besteht, ergibt sich, daß die Erregung im Magnetfelde stets diamagnetisch ist, wenn das Magneton keine Figurennachse besitzt.

Sind die drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist die diamagnetische Suszeptibilität vom Felde und der Temperatur unabhängig, wie vielfach beobachtet worden ist.

Sind die Hauptträgheitsmomente nicht alle einander gleich, so ergibt sich eine Abhängigkeit vom Felde und der Temperatur, wie sie mit Ausnahme von sehr tiefen Temperaturen von Honda wirklich experimentell festgelegt ist.

Ein quantitativer Vergleich der Theorie mit den Messungen wird die Anzahl Magnetonen im Grammolekül und die Hauptträgheitsmomente des Magnetons ergeben.

Besitzt das Magneton eine Figurennachse, so ist die Erregung paramagnetisch. Das magnetische Moment bleibt zeitlich konstant, wie es die Erfahrung verlangt, da das Magneton nicht ausstrahlt, und es hängt auch nicht von der Temperatur ab, in Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden von Weiss; hat also auch speziell im absoluten Nullpunkt einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, wie es sich auch aus den Messungen bei tiefen Temperaturen

ergibt. Es ist somit wegen dieser Tatsache nicht nötig, eine Nullpunktsenergie für Probleme der statistischen Mechanik anzunehmen.

Während der Diamagnetismus rein auftreten kann, ist dies beim Paramagnetismus nicht der Fall. Zu ihm gesellt sich stets der Diamagnetismus, der den thermischen Rotationen um die äquatorialen Achsen entspricht. Bei kleinen Feldern und niedrigen Temperaturen kann der Paramagnetismus überwiegen; er geht aber bei höheren Temperaturen sowie bei stärkeren Feldern in Diamagnetismus über. Das sind die Erscheinungen des kürzlich von Weber und seinem Schüler Overbeck entdeckten Metamagnetismus.

La Plata, Instituto de Fisica, 28. Juni 1915.

(Eingegangen 5. August 1915.)

**4. Das neutrale Atom  
und das positive Atomion als Träger des Banden-  
und des Serienspektrums des Wasserstoffs;  
von J. Stark.**

---

**Inhalt:** 1. Einleitung. — 2. Das H-Serien- und das H-Banden-spektrum haben verschiedene Träger. — 3. Die Träger des H-Serien- und des H-Banden-spektrums haben beide die Masse ( $m = 1$ ) des Wasser-stoffatoms. — 4. Der Träger des Serienspektrums ist das positive Atomion. — 5. Das neutrale H-Atom kommt nicht im Gleichgewichtszustand mit scharfen Spektrallinien in merklicher Zahl als bewegtes Teilchen in den Kanalstrahlen vor. — 6. Anregung der ruhenden Serien- und Banden-linien durch den Stoß von Kathoden- und Kanalstrahlen. — 7. Anhang: Die H-Bandenlinien in den Kanalstrahlen werden nicht durch den Stoß der sekundären Kathodenstrahlen, sondern unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen zur Emission gebracht.

---

**1. Einleitung.** — Haben das Serien- und das Banden-spektrum des Wasserstoffs<sup>1)</sup> denselben Träger, etwa das neutrale Atom? Haben sie verschiedene Träger, etwa das eine das

1) Unter Bandenspektrum des Wasserstoffs verstehe ich hier wie an früheren Stellen das von anderen Autoren als zweites oder Viellinienspektrum bezeichnete Spektrum. Die Bezeichnung „zweites Spektrum“ ist nichtssagend; die Bezeichnung „Viellinienspektrum“ deutet lediglich den Linienreichtum dieses Spektrums an und läßt keine kurze Wortbildung für „Linie des Viellinienspektrums“ (Bandenlinie) zu. Daß man zur Bezeichnung eines Spektrums zunächst die in die Augen fallende gesetzmäßige Anordnung seiner Linien benutzt hat, ist historisch verständlich und gerechtfertigt. Bei fortschreitender Erforschung der Eigen-schaften von Spektrallinien darf es nicht bloß als erlaubt, sondern als wünschenswert bezeichnet werden, daß Bezeichnungen für die Spektren gewählt werden nach dem Gesichtspunkt übereinstimmender Eigen-schaften, oder daß bereits vorhandenen, ursprünglich enger gedachten Bezeichnungen ein umfassenderer und vertiefter Sinn unterlegt werde. Dieser Fall liegt nach meinem Urteil beim Viellinienspektrum des Wasser-stoffs vor. Bei kurzer oberflächlicher Betrachtung desselben fallen aller-dings nicht auf den ersten Blick wie beim Bandenspektrum des Stick-stoffs bandenartige Liniengruppen auf; wer sich aber eingehender mit

neutrale  $H_2$ -Molekül, das andere das neutrale H-Atom, oder das eine das neutrale Atom, das andere das positive Atomion? Die Beantwortung dieser Fragen ist von grundlegender Bedeutung für die Spektralanalyse und die Erforschung der Atomstruktur. Nach dem gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse dürfen wir kaum erwarten, daß es uns gelingen wird, jene Frage so unmittelbar durch die Beobachtung zu beantworten, daß wir die Antwort als festgestellte Tatsache bezeichnen können. Wir werden vielmehr zufrieden sein müssen, wenn es uns gelingen wird, aus Tatsachen unter Zuhilfenahme möglichst weniger und möglichst wahrscheinlicher Voraussetzungen Folgerungen über die Träger der zwei Spektren des Wasserstoffs zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Folgerungen und unser Zutrauen zu ihnen wird um so größer sein, je mehr verschiedene Tatsachen zu denselben Folgerungen führen oder je mehr Erscheinungen diese einfach zu deuten gestatten.

Dieses Verfahren habe ich in der vorliegenden Mitteilung angewendet. Es wird aus einer Reihe von Beobachtungen oder Tatsachen das Resultat gewonnen, daß der Träger des H-Serienpektrums das positive H-Atomion, derjenige des H-Bandenpektrums das neutrale H-Atom ist. Obwohl es aus der Art meiner Schlußfolgerungen von selbst hervorgeht, möchte ich doch ausdrücklich betonen, daß ich dieses Resultat nicht als eine unmittelbar erwiesene Tatsache, sondern ledig-

---

ihm beschäftigt hat, bemerkte derartige Gruppen, und G. S. Fulcher (Phys. Zeitschr. 13. p. 1137. 1912) hat auch schon mehrere Linien in Banden zusammengefaßt. In jeder anderen Hinsicht verhält sich das Bandenspektrum (Viellinienspektrum) des Wasserstoffs ganz analog dem Bandenspektrum eines anderen Elementes. So zeigen seine Linien zum Teil keinen Zeeman-Effekt, zum Teil einen normalen, zum Teil einen anomalen wie die Bandenlinien des Stickstoffs. Die Bandenlinien des Wasserstoffs zeigen wie diejenigen des Stickstoffs oder Sauerstoffs keinen Kanalstrahlen-Dopplereffekt, im Gegensatz zu den Serienlinien. Das Bandenspektrum des Wasserstoffs wird wie dasjenige des Stickstoffs von den Kathoden- und Kanalstrahlen schon bei kleinerer Geschwindigkeit als das Serienspektrum angeregt; in der positiven Säule ist es wie dasjenige des Stickstoffs bei kleiner Stromdichte intensiver als das Serienspektrum; seine Intensität nimmt wie im Falle des Stickstoffs mit wachsender Stromdichte weniger rasch als diejenige des Serienspektrums zu und ist im Funken unmerklich klein, verglichen mit der Intensität der Serienlinien.

lich als sehr wahrscheinlich betrachte. Auch gebe ich zu, daß meine Folgerungen nicht die einzige möglichen oder zwingend seien. Aber sie erscheinen mir von allen möglichen Folgerungen am ungezwungensten und am wenigsten mit unbewiesenen Voraussetzungen belastet; dazu stehen sie, soviel ich sehen kann, mit keiner Beobachtung in Widerspruch. Wenn ein Einwand gegen sie erhoben wird, so darf ich wohl erwarten, daß er auf eine Tatsache, nicht auf eine Hypothese gegründet wird. Und wenn mir eine Hypothese zu einer abweichenden Deutung einer der von mir verwerteten Tatsachen entgegengehalten wird, so möchte ich wünschen, daß der Versuch gemacht werde, mit Hilfe einer solchen Hypothese alle von mir herangezogenen Tatsachen in übereinstimmender Weise zu deuten.

Die Frage nach dem Träger des Banden- und des Serienspektrums des Wasserstoffs ist fast ebenso alt wie die Entdeckung der zwei Spektren selbst. Die Annahme, daß der Träger des Serienspektrums das positive H-Atomion sei, hat mich vor zehn Jahren zur Auffindung des Dopplereffektes in den H-Kanalstrahlen geführt. Damals und mehrfach in den folgenden Jahren ist von mir und anderer Seite das Problem des Trägers der H-Serie besprochen worden. Ich will auf die Geschichte des Problems hier nicht zurückgreifen, sondern unter neuen Gesichtspunkten zu seiner Lösung zu gelangen versuchen.

2. *Das H-Serien- und das H-Bandenspektrum haben verschiedene Träger.* — Die Beobachtung des Kanalstrahlen-Dopplereffektes deckte gleich zu Anfang einen wichtigen Unterschied zwischen dem Serien- und dem Bandenspektrum des Wasserstoffs auf: die H-Serienlinien zeigen alle den Kanalstrahlen-Dopplereffekt oder bewegte Intensität in beträchtlicher Stärke; die H-Bandenlinien zeigten bis jetzt auch nicht eine Andeutung einer bewegten Intensität. Diese Beobachtung ist nach mir von anderen Forschern mehrfach bestätigt worden, und ich habe seit meinen ersten Beobachtungen immer wieder die Gelegenheit wahrgenommen, sie nachzuprüfen. So besitze ich Spektrogramme, auf denen die bewegten Streifen der H-Serienlinien breit und überlichtet und auch die ruhenden Bandenlinien überlichtet sind, von deren bewegter Intensität indes nicht eine Spur wahrzunehmen ist. Auf Grund dieser

Spektrogramme kann ich folgendes behaupten: Unter den Umständen, unter denen bis jetzt der Kanalstrahlen-Dopplereffekt an Wasserstofflinien beobachtet wurde, ist die bewegte Intensität der H-Bandenlinien zum mindesten 100mal kleiner als diejenige der Serienlinien, wenn sie überhaupt von Null verschieden ist.

Die vorstehenden Tatsachen lassen uns nachstehende Folgerungen ziehen. Was das Serienspektrum betrifft, so beweist das Auftreten des Kanalstrahlen-Dopplereffektes in ihm, daß sein Träger in beträchtlicher Zahl als bewegtes Teilchen in den Kanalstrahlen vorkommt und daß zudem seine Schwingungszentren in ihrem Träger, die „Serienelektronen“, in dem Vorgang der Bewegung der Kanalstrahlen durch ein verdünntes Gas zum Leuchten angeregt werden. Über die Art der Anregung des Leuchtens in den bewegten Serienlinien läßt uns eine andere Tatsache<sup>1)</sup> eine genauere Aussage machen. Es ist nämlich die bewegte Intensität der H-Serienlinien zum Teil in der Weise polarisiert, daß die Schwingungen der Emissionszentren parallel der Achse der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen erheblich intensiver sind als die Schwingungen senkrecht dazu. Diese Tatsache läßt wohl keine andere Deutung zu, als daß die Serienelektronen, während sie in ihrem bewegten Träger sitzen, durch dessen Stoß auf ruhende Teilchen, angenähert in der Achse der Geschwindigkeit, aus ihrer Ruhelage heraus in ihrem Träger beschleunigt werden und nach vollendetem Stoß in Schwingungen um die Ruhelage angenähert in der Achse der Geschwindigkeit Licht ausstrahlen.

Was das Bandenspektrum betrifft, so läßt das Fehlen des Kanalstrahlen-Dopplereffektes in ihm, streng genommen, zwei Deutungen zu: erstens, es kommt sein Träger nicht in merklicher Zahl als bewegtes Teilchen in den Kanalstrahlen vor, zweitens, er kommt zwar in merklicher Zahl vor, wird aber nicht zu merklicher Lichtemission in seinen Bandenlinien angeregt. Von diesen zwei Deutungen ist indes die zweite durchaus unwahrscheinlich. Der Fall der Serienlinien zeigt uns ja, daß ihre Zentren unmittelbar durch den Stoß ihrer Träger auf ruhende Gasmoleküle zu Schwingungen um

1) J. Stark, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 104. 1908;  
J. Stark u. H. Lunelund, Ann. d. Phys. 46. p. 68. 1915.

ihre Ruhelage angeregt werden. Warum soll das gleiche nicht auch bei den Zentren der Bandenlinien der Fall sein, wenn ihr Träger auf seinem Wege auf ruhende Gasmoleküle trifft? Welche Hand schützt sie davor, durch einen solchen Stoß aus ihrer Ruhelage herausgeworfen zu werden, oder führt sie, im Falle dies geschieht, ohne Schwingungen in ihre Ruhelage zurück? Die H-Kanalstrahlen sind von  $10^6$ — $10^8$  cm sec $^{-1}$  Geschwindigkeit beobachtet worden. Der Zufall läßt in der Relativbewegung von Kanalstrahlen und ruhendem Gas bewegte und ruhende Atome in allen möglichen Abständen von der Achse ihrer Relativgeschwindigkeit aufeinanderstoßen. Sollten nun in allen diesen Fällen die Bandenelektronen in bewegten Trägern nicht durch Stoß zu Lichtemission angeregt werden können? Gewiß, man kann mit Ja auf diese Frage durch eine Hypothese antworten; indes ist der Wunsch wohl nicht übertrieben, daß dann diese Hypothese nicht mit einem allgemeinen Hinweis auf die Ungeklärtheit des Vorganges der Lichtemission in zahlreichen Fällen, sondern in dem speziellen vorliegenden Falle wenigstens einigermaßen begründet und plausibel gemacht werde. Daß übrigens die Träger der Bandenlinien durch Zusammenstoß mit anderen Atomen in der Relativbewegung von Kanalstrahlen und ruhendem Gas zu Lichtemission angeregt werden können, läßt sich auf Grund folgender Tatsachen wenigstens plausibel machen. Die H-Bandenlinien zeigen in den Kanalstrahlen zwar keine bewegte, wohl aber eine ruhende Intensität, und diese wird, wie in dem Anhang zu dieser Mitteilung gezeigt ist, zum größten Teile unmittelbar durch den Stoß der bewegten Kanalstrahlenteilchen auf ruhende Moleküle zur Emission gebracht. Dieser Stoß kann aus dem H<sub>2</sub>-Molekül ein neutrales Atom oder ein positives Atomion abspalten und dadurch erst den ruhenden Träger einer Linie schaffen. Deren Emission mag eine Folge einer solchen Umlagerung sein; es ist aber auch möglich, daß die Bandenelektronen unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen selbst zu Schwingungen angeregt werden. Der Wettbewerb dieser zwei Möglichkeiten läßt zwar nicht zwingend folgern, daß die Träger der Bandenlinien auch als Kanalstrahlenteilchen zu Lichtemission angeregt werden würden, wenn sie als solche vorkämen; immerhin aber machen jene Tatsachen diese Folgerung plausibel.

Da gemäß diesen Darlegungen die zweite der oben angegebenen Möglichkeiten zur Deutung des Fehlens des Kanalstrahlen-Dopplereffektes im H-Bandenspektrum sehr unwahrscheinlich ist, dürfen wir wohl die andere Deutung annehmen, zumal sie nicht allein von vornehmerein an sich wahrscheinlich ist, sondern sich auch durch weitere Folgerungen begründen läßt. Es sei also aus dem Fehlen des Kanalstrahlen-Dopplereffektes im H-Bandenspektrum gefolgert, daß dessen Träger nicht in merklicher Zahl als bewegtes Teilchen in den H-Kanalstrahlen vorkommt. Hieraus und aus der Folgerung, daß der Träger der H-Serie als bewegtes Teilchen in den H-Kanalstrahlen vorkommt, ergibt sich dann, daß das Banden- und das Serienspektrum verschiedene Träger haben. Dieses wichtige Resultat erscheint durch die vorhergehenden Überlegungen ungezwungen begründet. Es führt auch zu einer Reihe von Folgerungen, die in Übereinstimmung mit der Erfahrung stehen. Wollte man ihm gegenüber die Hypothese aufstellen, daß die zwei Spektren denselben Träger haben, so würde das Fehlen des Kanalstrahlen-Dopplereffektes im Bandenspektrum besonders schwer zu begründen sein. Wenn wirklich die Banden- und die Serienelektronen demselben bewegten Träger angehörten, warum lassen sich dann wohl die einen, aber nicht die anderen durch den Stoß der bewegten Träger auf ruhende Gasmoleküle zu Schwingungen um ihre Ruhelagen in dem gleichen Frequenzbereich anregen. Warum geraten dann die Bandenelektronen nicht wenigstens durch ihre Koppelung mit den Serienelektronen — eine solche Koppelung wäre dann doch wohl zweifellos vorhanden — in Schwingungen, daß deren Emission wenigstens ein Hundertstel der bewegten Intensität der Serienlinien erreichte?

3. Die Träger des H-Serien- und des H-Bandenspektrums haben beide die Masse ( $m = 1$ ) des Wasserstoffatoms. — Aus dem maximalen Kanalstrahlen-Dopplereffekt einer H-Serienlinie läßt sich die maximale Geschwindigkeit ihres Trägers ermitteln. Aus dieser und aus dem Kathodenfall läßt sich dann in der bekannten Weise die Masse des Trägers der Serienlinie berechnen, wenn man die Ladung kennt, mit welcher er beim Durchlaufen des Kathodenfalls beschleunigt wurde. Da die elektromagnetische Analyse der Kanalstrahlen für Wasserstoff nur einfach geladene Atomionen aufgedeckt

hat, so haben wir als Ladung der Träger der Serienlinien während der Zeit der Beschleunigung im Kathodenfall ein Elementarquantum anzusetzen. Führt man hierfür und für Werte des Kathodenfalls kleiner als 2000 Volt die angegebene Berechnung der Masse des Trägers der H-Serienlinien durch, so erhält man hierfür den Wert der Masse des Wasserstoffatoms ( $m = 1$ ) und zwar für alle Linien ( $H_{\alpha}, H_{\beta}, H_{\gamma}, H_{\delta}, H_{\epsilon}$ ) der Serie, so weit sie untersucht werden können. Wir dürfen es somit als ein Resultat des Kanalstrahlen-Dopplereffektes betrachten, daß die H-Serienlinien alle denselben Träger haben und daß dieser die Masse des Wasserstoffatoms hat.

Dieses Resultat ist an sich sehr wichtig und gestattet weiter ein Urteil über die Zuverlässigkeit einer anderen Methode zur Ermittlung der Masse von Linienträgern. Diese besteht in der Messung derjenigen Halbwte von Spektrallinien, welche ihren Ursprung ausschließlich in der Verbreiterung infolge der thermischen Bewegung der Linienträger als Gasmoleküle in der Sehlinie gemäß dem Dopplerschen Prinzip hat. Wie sich nämlich zeigen läßt, ist diese Halbwte

$$\Delta \lambda = 3,58 \cdot 10^{-7} \lambda \sqrt{\frac{T}{m}} \text{ cm},$$

wo  $T$  die absolute Temperatur des leuchtenden Gases ist. In einem ausführlichen Bericht<sup>1)</sup> habe ich nun die verschiedenen Arten von Linienverbreiterung besprochen und die Bedingungen klargestellt, welche erfüllt sein müssen, wenn die Verbreiterung infolge der thermisch-molekularen Bewegung („thermokinetische“ Verbreiterung) jede andere überwiegen und somit die Ermittlung der Masse des Linienträgers nach der obigen Formel möglich sein soll. Wenn ich auch für die Einzelheiten auf meinen Bericht verweisen muß, so rechtfertigt es doch die Bedeutung des hier behandelten Problems, daß ich hier wenigstens die leitenden Gesichtspunkte angebe.

Damit die Verbreiterung durch die Störungen infolge der molekularen Zusammenstöße klein ist verglichen mit der thermokinetischen Verbreiterung, muß der Gasdruck kleiner als 10 mm sein. Damit die Verbreiterung durch die zwischenmolekularen elektrischen Felder klein ist verglichen mit der thermokinetischen Verbreiterung, muß die Ionendichte und somit die Dichte der das Leuchten erregenden elektrischen

1) J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. 12. p. 349. 1915.

Strömung (positive Säule) möglichst klein sein. Diese letzte Bedingung ist auch zu dem Zweck zu erfüllen, daß der kinetische Zustand des elektrisch durchströmten Gases nicht merklich von dem thermodynamischen Zustand von einer bestimmten Temperatur verschieden ist.

Die erste Bedingung läßt sich bei allen Gasen leicht erfüllen. Die zweite läßt sich mit größter Annäherung an das Ideal im Falle der Edelgase erfüllen. Diese besitzen nämlich Linien, deren Intensität schon bei kleiner Stromdichte groß ist. Aus diesem Grunde ist es Fabry und Buisson<sup>1)</sup> bei diesen Gasen gelungen, die Richtigkeit der obigen Formel für die thermokinetische Halbwelte mit großer Genauigkeit und überzeugend nachzuweisen. Schwieriger liegt der Fall bei den Serienlinien des Wasserstoffs. Um sie in einer für die Messung hinreichend großen Intensität zu erhalten, muß man sie einerseits mit erheblich großer Stromdichte anregen, andererseits werden sie von allen bis jetzt untersuchten Linien am weitesten durch das elektrische Feld zerlegt<sup>2)</sup> und sind darum am empfindlichsten für die Verbreiterung durch zwischenmolekulare elektrische Felder. Ob darum bei ihnen die thermokinetische Verbreiterung noch rein für sich allein auftritt, läßt sich nicht voraussagen und bedarf einer vorsichtigen Prüfung. Diese ist indes dadurch ermöglicht, daß wir aus dem Kanalstrahlen-Dopplereffekt die Masse des Trägers der H-Serienlinien kennen und somit die thermokinetische Halbwelte für diese berechnen und mit der experimentell ermittelten berechnen können. Nun haben A. A. Michelson<sup>3)</sup>, Fabry und Buisson<sup>4)</sup> und Dempster<sup>5)</sup> die Halbwelte von H<sub>a</sub> bei niedrigem Druck an der positiven Säule bestimmt. Der beobachtete Wert stimmt, wenn auch nicht genau, doch angenähert mit der thermokinetischen Halbwelte überein, die sich für  $m = 1$  berechnet. Hieraus ist zu schließen, daß bei einer H-Linie, für welche die elektrische Zerlegung nicht größer ist als für H<sub>a</sub>, die beobachtete Halbwelte unter den Bedingungen jener Forscher mit Annäherung als rein

1) Ch. Fabry u. H. Buisson, Compt. rend. 154. p. 1224. 1912.

2) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 1017. 1914.

3) A. A. Michelson, Phil. Mag. 34. p. 280. 1892.

4) Ch. Fabry u. H. Buisson, Compt. rend. 154. p. 1500. 1912.

5) A. J. Dempster, Ann. d. Phys. 47. p. 791—808. 1915.

thermokinetisch aufgefaßt werden kann; dagegen wird dies nicht mehr der Fall sein können für Linien, welche durch das elektrische Feld weiter als  $H_\alpha$  zerlegt werden.

In der Tat haben Michelson und Dempster für die Linie  $H_\beta$  eine erheblich größere Halbwte als die thermokinetische beobachtet, und einen noch größeren Unterschied fand, wie zu erwarten ist, Dempster bei  $H_\gamma$ . Was dagegen die H-Bandenlinien betrifft, so werden sie, soweit sie untersucht sind, viel weniger als  $H_\alpha$  vom elektrischen Feld zerlegt.<sup>1)</sup> Wenn darum schon bei  $H_\alpha$  unter den Bedingungen von Fabry und Buisson die Halbwte eine thermokinetische ist und die Masse des Linienträgers berechnen läßt, so trifft dies viel genauer für die H-Bandenlinien zu. An einigen von diesen haben nun Fabry und Buisson die Halbwte beobachtet und aus ihr nach der obigen Formel die Masse ihres Trägers ermittelt und dafür genau den Wert  $m = 1$  gefunden.

Gemäß diesen Darlegungen dürfen wir es als experimentell sichergestellt erachten, daß der Träger von H-Bandenlinien, ebenso wie derjenige der H-Serienlinien, die Masse  $m = 1$  besitzt. Fabry und Buisson haben freilich, wie es scheint, nur wenige H-Bandenlinien auf ihre Halbwte untersucht, und es muß darum mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß es unter den zahlreichen Linien des Viellinienspektrums des Wasserstoffs solche gibt, deren Halbwte nicht die Masse  $m = 1$  für ihren Träger liefert. Der Vorsicht halber möchte ich darum in der vorliegenden Abhandlung die Bezeichnung H-Bandenlinien auf diejenigen Linien beschränkt wissen, deren Träger die Masse  $m = 1$  hat.

4. *Der Träger des Serienspektrums ist das positive Atomion.* — Gemäß Abschnitt 2 sind die Träger des Serien- und des Bandenspektrums des Wasserstoffs voneinander verschieden, gemäß Abschnitt 3 haben sie beide die gleiche Masse  $m = 1$ . Wir kennen nun in der Tat zwei Individuen, welche die gleiche Masse haben und doch verschieden voneinander sind. Es ist dies das neutrale Wasserstoffatom und das positive Wasserstoffatomion, das aus jenem durch Abtrennung eines negativen Elektrons sich bilden kann. So kommen wir zu der Folgerung, daß das neutrale H-Atom und das positive H-Atomion

1) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, p. 75. S. Hirzel, Leipzig 1914.

die Träger des H-Banden- und H-Serienspektrums sind. Die Frage erhebt sich nun: Ist das Serienspektrum dem neutralen Atom oder dem positiven Atomion zuzuweisen? Auf diese Frage erhalten wir durch die Vereinigung folgender Tatsachen Antwort. Einerseits kommt der Träger der H-Serie als bewegtes Teilchen in den H-Kanalstrahlen vor, wie aus dem Auftreten des Kanalstrahlen-Dopplereffektes an den Serienlinien folgt. Andererseits kommt, wie W. Wien und andere Forscher durch die elektromagnetische Analyse gezeigt haben, das positive H-Atomion in den H-Kanalstrahlen in erheblicher Zahl vor. Zudem geht dies aus einem Zusammenstoß mit einem ruhenden Atom jedenfalls in sehr vielen Fällen fertig gebildet als Atomion mit scharfen Eigenfrequenzen hervor (vgl. Abschnitt 5). Die ungezwungenste Folgerung aus diesen Tatsachen ist, daß das positive H-Atomion der Träger der H-Serie ist.

Ist somit der Träger des Serienspektrums festgestellt, so folgt aus der obigen Alternative, daß der Träger des H-Bandenpektrums das neutrale Wasserstoffatom ist.

5. Das neutrale H-Atom kommt nicht im Gleichgewichtszustand mit scharfen Spektrallinien in merklicher Zahl als bewegtes Teilchen in den Kanalstrahlen vor. — Das vorstehende Resultat, daß das neutrale H-Atom der Träger des H-Bandenpektrums ist, und die Tatsache, daß die H-Bandenlinien keinen merklichen Kanalstrahlen-Dopplereffekt zeigen, lassen weiter folgern, daß das neutrale H-Atom nicht in merklicher Zahl als bewegtes Teilchen in den H-Kanalstrahlen vorkommt. Diese Folgerung kann noch auf anderem Wege begründet werden. Obwohl sie nämlich auf den ersten Blick einem Resultat der elektromagnetischen Analyse der Kanalstrahlen zu widersprechen scheint, gewinnen wir gerade durch diese ein tieferes Verständnis für sie.

Wie W. Wien<sup>1)</sup> und andere Forscher festgestellt haben, kommen in einem Kanalstrahlbündel gleichzeitig positive und in merklicher Zahl neutrale Strahlenteilchen vor. Wollte man im Falle des Wasserstoffs die neutralen Strahlen vorschnell mit neutralen H-Atomen identifizieren, so bestünde allerdings ein Widerspruch zu unserer obigen Folgerung über das Fehlen der neutralen H-Atomkanalstrahlen. Indes hat

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 27. p. 1029. 1908; 30. p. 349. 1909.

man zu beachten, daß die elektromagnetische Analyse lediglich das Vorkommen neutraler Strahlen feststellen läßt, jedoch über die Natur dieser Strahlen keine direkte Aussage macht. Immerhin aber läßt sich aus einem weiteren Resultat der elektromagnetischen Analyse eine Folgerung über die Natur der neutralen Kanalstrahlen ziehen, welche vollständig im Einklang mit der obigen spektralanalytischen Folgerung steht.

Wie nämlich W. Wien und andere Forscher gezeigt haben, bildet sich zwischen den neutralen und den positiven Kanalstrahlen ein Gleichgewicht aus, indem sich einerseits positive Atomionen durch Stoß neutraler Strahlen auf ruhende Gasmoleküle infolge von Ionisierung aus neutralen Strahlen und andererseits neutrale Strahlen durch Stoß positiver Strahlen auf ruhende Gasmoleküle infolge von Neutralisierung aus positiven Strahlen bilden. W. Wien<sup>1)</sup> und J. Koenigsberger und J. Kutschewski<sup>2)</sup> haben experimentell die mittlere freie Weglänge der positiven und neutralen Strahlenteilchen zwischen zwei aufeinander folgenden Umladungen (von positiv zu neutral und von neutral zu positiv) bestimmt. Die von ihnen gefundenen Werte beziehen sich zwar auf tiefere Drucke als diejenigen, die bei der Beobachtung des Kanalstrahlen-Dopplereffektes vorlagen; indes finden sie Werte, welche den mittleren freien Weglängen von Gasmolekülen bei solchen Drucken nahekommen. Soweit es uns darum nur auf die Größenordnung ankommt, dürfen wir für den Druckbereich des Kanalstrahlen-Dopplereffektes im Wasserstoff (0,1—0,01 mm) die mittlere freie Weglänge der positiven und der neutralen Strahlen gaskinetisch nach der Formel

$$\lambda = \frac{1}{n n \sigma^3}$$

berechnen, wo  $n$  die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit,  $\sigma$  die Summe der Radien des bewegten und des ruhenden Moleküls ist. Setzen wir für 760 mm Druck  $n$  gleich  $2,79 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ , den Radius des  $\text{H}_2$ -Moleküls gleich  $2,2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ , den des Strahlenteilchens gleich  $1 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ , so berechnet sich  $\lambda$  für 0,076 mm Druck zu  $1 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$ .

Aus der mittleren freien Weglänge der Strahlen läßt sich nun eine andere Größe berechnen, welche von großer Bedeutung

1) W. Wien, Berl. Akad. 27. Juli 1911; Ann. d. Phys. 39. p. 528. 1912.

2) J. Koenigsberger u. J. Kutschewski; Ann. d. Phys. 37. p. 161. 1912.

für das Verständnis der Lichtemission der Kanalstrahlen ist. Es ist dies die mittlere Lebensdauer eines Strahlenteilchens. Setzen wir nämlich für die Geschwindigkeit der leuchtenden H-Strahlen den Mittelwert  $v = 4 \cdot 10^7$  cm sec $^{-1}$ , so ist die mittlere Lebensdauer eines positiven oder neutralen Strahles bei 0,076 mm Druck von der Ordnung  $2 \cdot 10^{-9}$  sec. Unmittelbar nachdem ein neutraler oder ein positiver Strahl aus dem Zusammenstoß eines Strahles mit einem ruhenden Molekül geboren ist, hat er also im Mittel nur  $2 \cdot 10^{-9}$  sec zur Betätigung in einem kurzen Leben zur Verfügung. Soll er wenigstens während eines Teiles seines Lebens Licht in scharfen Spektrallinien emittieren können, so ist notwendig, daß er früher als in  $2 \cdot 10^{-9}$  sec unmittelbar nach seiner Geburt in einen Zustand kommt, in welchem ihm scharfe Eigenfrequenzen eigentümlich sind. Diese Forderung ist für das neutrale und positive Strahlenteilchen eingehend zu prüfen.

Was zunächst das positive Strahlenteilchen betrifft, so ist es wohl möglich, daß in einer Anzahl von Fällen seine Erschütterung durch den Stoß so groß ist, daß es nicht sofort nach dem Stoß einen Zustand erreichen kann, in dem ihm scharfe Eigenfrequenzen eigentümlich sind. In einer erheblichen Zahl von Fällen wird dies indes zutreffen; es geht in diesen Fällen das Strahlenteilchen als fertiges positives Atomion aus dem Stoß hervor, das für sich allein keine Entwicklung mehr durchmacht, lediglich seine Teile (Serienelektronen) in scharfen Frequenzen um ihre Ruhelagen während seines Lebens ( $2 \cdot 10^{-9}$  sec) schwingen und Licht emittieren läßt. Ein positives H-Atomion vermag so als Kanalstrahl unter den angenommenen Bedingungen im Mittel  $1,5 \cdot 10^6$  Wellen für H $_{\beta}$  ungestört aneinander zu reihen.

Anders liegt der Fall bei dem neutralen Strahlenteilchen. Dieses wird aus dem Stoß als ein Quantenpaar geboren, nämlich als das System Atomion-Elektron, in welchem das positive Quantum mit dem negativen, je nach dem wechselseitigen Abstand und der Energie ihrer Relativbewegung, mehr oder minder fest gekoppelt ist. Aus diesem Zustand des Quantenpaares entwickelt sich das neutrale Strahlenteilchen unmittelbar nach dem Stoß weiter, indem das Elektron auf gekrümmten Umlaufbahnen dem positiven Atomion und zuletzt seiner Ruhelage in dem entstehenden neutralen

Atom sich nähert, und wenn das Quantenpaar lange genug leben könnte, so würde es sich in ein neutrales Atom verwandeln, in welchem das Elektron in oder nahe seiner Ruhelage sich befindet. Das aber ist die Frage: ob eine Zeit von  $2 \cdot 10^{-9}$  sec ausreicht für die Umbildung eines Quantenpaares zu einem neutralen Atom. Wir wissen hierüber nichts Bestimmtes. Aber wenn wir bedenken, daß die bei der Umwandlung frei werdende Energie ausgestrahlt werden muß und daß die Dämpfung der Bewegung von Elektronen durch Strahlung sehr klein ist, so dürfen wir vermuten, daß die Zeit der Bildung eines neutralen H-Atoms aus einem Quantenpaar erheblich größer als  $2 \cdot 10^{-9}$  sec ist. Ist dies der Fall, dann können sich in einem H-Kanalstrahlenbündel unter den Bedingungen für die Beobachtung des Kanalstrahlen-Dopplereffektes die neutralen Strahlen nicht in merklicher Zahl in bewegte neutrale H-Atome verwandeln; somit kommen dann diese nicht in merklicher Zahl als bewegte Teilchen vor, und können darum auch nicht ihr Spektrum in bewegter Intensität in merklichem Maße emittieren.

Betrachten wir es als erwiesen, daß der Träger des Bandenspektrums das neutrale H-Atom ist, so können wir umgekehrt aus dem Fehlen des Kanalstrahlen-Dopplereffektes in diesem und aus den Resultaten der elektromagnetischen Analyse folgern, daß die neutralen Strahlen in den H-Kanalstrahlen neutrale Quantenpaare sind und daß die Zeit der Bildung eines H-Atoms aus einem Quantenpaar größer als  $2 \cdot 10^{-9}$  sec ist.

Die vorstehenden Überlegungen müssen hinsichtlich des Spektrums eines Atoms und eines Quantenpaares vertieft werden. Es herrscht wohl kein Zweifel darüber, daß das neutrale H-Atom, wenn sein abtrennbares Elektron in seiner Ruhelage oder in ihrer nächsten Nähe sich befindet, scharfe Eigenfrequenzen besitzt; deren Gesamtheit haben wir ja im Bandenspektrum zu erblicken. Anders liegt der Fall beim Quantenpaar. In ihm besitzt ja das Elektron während seiner Anlagerung an den positiven Atomrest keine bestimmte Gleichgewichtslage; die Kraft, welche dieser von Seite des sich nähernden Elektrons erfährt, ändert sich stark mit dem wechselseitigen Abstand; zusammen mit dieser Kraft ändern sich stetig die Eigenfrequenzen der Schwingungszentren im Atomrest. Das in der Entwicklung zum neutralen Atom be-

griffene Quantenpaar kann darum keine scharfen Spektrallinien, sondern nur kontinuierliche Spektralpartien besitzen. Wegen ihrer geringen Intensität für den Frequenzbereich Eins im Vergleich zu einer scharfen Banden- und Serienlinie sind diese vermutlichen Spektralstreifen des H-Quantenpaares schwer neben dem Serien- und Bandenspektrum bei der kleinen Stromstärke in einer Geißlerröhre zu beobachten; sie mögen zudem im Ultraviolett liegen. Jedenfalls kennt man bis jetzt noch kein derartiges Streifenspektrum des Wasserstoffs. Immerhin ist aber bei einem anderen Element, nämlich bei Quecksilber<sup>1)</sup>, ein solches Spektrum, bestehend aus breiten kontinuierlichen Banden, aufgefunden worden. Auch bei Sauerstoff kennt man ein solches Spektrum.

Aus der hier gegebenen Erklärung der Tatsache, daß bis jetzt kein Kanalstrahlen-Dopplereffekt im Bandenspektrum des Wasserstoffs beobachtet wurde, läßt sich die Erkenntnis für die Bedingung gewinnen, welche erfüllt sein muß, wenn auch an Linien neutraler Atome der Kanalstrahlen-Dopplereffekt merkbar werden soll. Sie besteht offenbar darin, daß die mittlere Lebensdauer eines Kanalstrahlenteilchens so groß sein muß, daß sich bewegte neutrale Quantenpaare in merklicher Zahl in neutrale Atome verwandeln können. Zu

---

1) J. Stark u. G. Wendt, Physik. Zeitschr. 14. p. 562. 1913.

Ich habe früher die Lichtquantenhypothese auf die Emission des Bandenspektrums angewendet (Physik. Zeitschr. 9. p. 85. 1908) und angenommen, daß bereits in den ersten Stadien der Anlagerung eines negativen Elektrons an seinen positiven Atomrest die Emission scharfer Spektrallinien statthat. Da ich die Lichtquantenhypothese nicht mehr als Arbeitshypothese verwende, so gebe ich jene vom Standpunkt der hypothesenfreien Dynamik aus unhaltbare Annahme auf. Auch in einer anderen Hinsicht habe ich meine Auffassung vom Bandenspektrum geändert. Ich habe nämlich früher die Zentren der Bandenlinien ausschließlich in den Valenzelektronen (abtrennbares Elektronen) erblickt. Diese Auffassung ist aber wohl zu eng. Wenn ich auch daran festhalte, daß die Frequenzen des Bandenspektrums eine Funktion der Kraftparameter der Valenzelektronen sind und mit deren Bindung oder Kopplung mit dem Atomrest sich ändern, so muß man es doch als möglich oder wahrscheinlich zulassen, daß an der Emission eines Bandenspektrums als Schwingungszentren auch diejenigen Serienelektronen beteiligt sind, welche im positiven Atomion die Zentren der Serienlinien sind. Ich habe hierauf bereits an früherer Stelle hingewiesen (J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, p. 130. S. Hirzel, Leipzig 1914).

diesem Zweck muß die mittlere freie Weglänge des Kanalstrahlenteilchens möglichst groß, der Gasdruck also möglichst niedrig sein; ferner muß die Geschwindigkeit der Strahlen teilchen so klein sein, daß sie sich durch ihren Stoß gerade noch zu Lichtemission anregen können. Die Bedingung kleiner Geschwindigkeit ist gerade im Falle des Wasserstoffs wegen seiner kleinen Masse am schwierigsten zu erfüllen; es ist darum fraglich, ob es in diesem Falle je gelingen wird, den Kanalstrahlen-Dopplereffekt an Linien des neutralen H-Atoms, also an Bandenlinien, zu beobachten.

*6. Anregung der ruhenden Serien- und Bandenlinien durch den Stoß von Kathoden- und Kanalstrahlen.* — Mangels überzeugenderer Folgerungen könnte man die in diesem Abschnitt besprochenen Erscheinungen zu einem Schluß auf die vermutlichen Träger des H-Banden- und Serienspektrums benutzen. Dies soll indes nicht geschehen. Es sollen die Erscheinungen vielmehr auf Grund unserer obigen Folgerungen gedeutet werden. In der Ungezwungenheit, mit der dies geschieht, dürfen wir dann rückwärts eine neue Bestätigung unserer Folgerungen erblicken.

Zunächst die in Betracht kommenden Beobachtungen. Daß Kathodenstrahlen bei ihrem Verlauf im Wasserstoff gleichzeitig dessen Banden- und Serienspektrum zur Emission bringen, ist eine seit langem bekannte Tatsache. Nun hat G. S. Fulcher<sup>1)</sup> diese Emission einmal für schnelle und einmal für langsamere Kathodenstrahlen spektrographisch aufgenommen. Während bei 50 Volt Kathodenfall die Serienlinien noch intensiver als die benachbarten Bandenlinien herauskamen, erschienen sie bereits bei 35—45 Volt Kathodenfall erheblich schwächer als diese. Das gleiche Resultat erhielten unabhängig von Fulcher, E. Gehrcke und R. Seeliger<sup>2)</sup>, als sie die Emission eines verzögerten Kathodenstrahlbündels entlang dessen Achse aufnahmen, indem sie es auf den Spektrographenspalt abbildeten. Es erschienen nämlich im spektralen Bilde die Bandenlinien länger als die Serienlinien; deren Intensität verschwand also gegen die jener bei kleiner Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen. Bei noch

1) G. S. Fulcher, Physik. Zeitschr. 13. p. 1132. 1912.

2) E. Gehrcke u. R. Seeliger, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 14. p. 1023. 1912.

kleinerer Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen wird auch die Emission des Bandenspektrums rasch schwächer; bei 13 Volt Geschwindigkeit konnte sie H. Rau<sup>1)</sup> nur eben noch feststellen. Diese Beobachtungen haben also folgendes Resultat ergeben: Kathodenstrahlen von 50—100 Volt Geschwindigkeit vermögen durch ihren Stoß auf ruhende  $H_2$ -Moleküle sowohl die H-Serien- wie die H-Bandenlinien zur Emission zu bringen; mit abnehmender Geschwindigkeit der stoßenden Kathodenstrahlen nimmt die Intensität der Banden- und Serienlinien in der Weise rasch ab, daß sie unterhalb eines Schwellenwertes der Geschwindigkeit oder kinetischen Energie unmerklich klein wird; der Schwellenwert der Kathodenstrahlenergie für die Anregung der Serienlinien ist ungefähr doppelt so groß wie der Schwellenwert für Anregung der Bandenlinien.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Emission der ruhenden Serien- und Bandenlinien infolge des Stoßes von Kanalstrahlen auf ruhende Gasmoleküle. Was die ruhenden Serienlinien im Kanalstrahlenspektrum betrifft, so habe ich früher<sup>2)</sup> allgemein nachgewiesen, daß sie unmittelbar durch den Stoß von Kanalstrahlen auf ruhende Gasmoleküle, nicht durch den Stoß der von den Kanalstrahlen erzeugten sekundären Kathodenstrahlen zur Emission gebracht werden. Daß dies auch für den Fall der H-Serienlinien zutrifft, geht allein daraus hervor, daß diese von den langsamen sekundären Kathodenstrahlen nicht merklich angeregt werden. Was die H-Bandenlinien im Kanalstrahlenspektrum betrifft, so habe ich im Anhang nachgewiesen, daß der größte Teil ihrer Intensität unmittelbar von dem Stoß der Kanalstrahlen, nicht von demjenigen der sekundären Kathodenstrahlen herrührt.

Wie ich bereits an einer früheren Stelle<sup>3)</sup> mitteilte, und wie ich seitdem durch weitere Beobachtungen feststellte, wird die von den Kanalstrahlen an ruhenden Molekülen erzeugte Lichtheission mit abnehmender Energie, von etwa 500 Volt Kathodenfall an, schwächer, erst langsam, dann sehr rasch, und zwar verschwindet sie für die Serienlinien etwa bei 100 Volt Kathodenfall, für die Bandenlinien bei etwa

1) H. Rau, Ber. d. Physik.-Med. Ges. Würzburg 1914.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 42, p. 163. 1913.

3) J. Stark, Ann. d. Phys. 18, p. 390. 1904.

40 Volt Kathodenfall. Wie die Kathodenstrahlen, vermögen also auch die Kanalstrahlen die Emission der Serien- und der Bandenlinien durch ihren Stoß auf ruhende Wasserstoffmoleküle erst oberhalb eines Schwellenwertes ihrer kinetischen Energie anzuregen, und zwar ist der Schwellenwert für die Serienlinien größer als derjenige für die Bandenlinien.<sup>1)</sup>

Die vorstehenden Beobachtungen über die Anregung der Serien- und der Bandenlinien durch den Stoß der Kathoden- und der Kanalstrahlen seien nun auf Grund unserer Folgerung gedeutet, daß der Träger des Serienspektrums das positive H-Atomion, derjenige des Bandenspektrums das neutrale H-Atom ist. Zunächst hat man zu beachten, daß zwar ein Teil der ruhenden H<sub>2</sub>-Moleküle in einzelne Atome dissoziert sein mag, daß aber unter den Bedingungen der beschriebenen

1) G. F. Fulcher (*Astrophys. Journ.* **34**. p. 389. 1911) hat die Lichemission eines dünnen Kanalstrahlbündels bei senkrechter Stellung von Sehlinie und Kanalstrahlnachse spektral zerlegt für verschiedene Werte des Kathodenfalles von 5000—500 Volt. Er gibt an, daß unter seinen Bedingungen das Verhältnis der Intensität der Serienlinien zu denjenigen der Bandenlinien mit abnehmendem Kathodenfall größer wurde und bei 500 Volt Kathodenfall nur mehr die Serienlinien auf seinen Platten sichtbar wurden. Man darf diese Angaben nicht dahin deuten, daß das Verhältnis der Intensität der ruhenden Serienlinien zu denjenigen der Bandenlinien in der vorstehenden Weise mit dem Kathodenfall sich ändert. Fulcher beobachtete vielmehr bei den Serienlinien übereinander gelagert die ruhende und die bewegte Intensität; die letzte ist bis herunter zu 500 Volt Kathodenfall erheblich größer als die erste, und bei geringer Intensität, wie sie unter Fulchers Bedingungen vorlag, bleiben die Bandenlinien in der Tat photographisch noch unsichtbar, wenn die bewegte Intensität der Serienlinien eben in normaler Schwärzung erscheint.

Stellt man die Sehlinie parallel der Achse des Kanalstrahlbündels, trennt man also die ruhende und die bewegte Intensität der Serienlinie voneinander, so erhält man das oben von mir angegebene Resultat. Ich besitze derartige Aufnahmen, auf denen das H-Bandenspektrum für 500 und 390 Volt Kathodenfall in beträchtlicher Intensität zu sehen ist. Die Intensitätsabnahme der ruhenden Serienlinien im Verhältnis zu den Bandenlinien mit sinkendem Kathodenfall wird erst unterhalb 600 Volt Kathodenfall merklich. Für größere Werte desselben ist das Verhältnis der Intensität der ruhenden H-Serienlinien zu denjenigen der Bandenlinien nahezu konstant (J. Stark, *Ann. d. Phys.* **21**. p. 430. 1906; L. Vegard, *Ann. d. Phys.* **39**. p. 152. 1912).

Beobachtungen dies nur ein verschwindend kleiner Prozentsatz sein kann. Der Stoß eines Kathoden- und Kanalstrahlenteilchens trifft also in weitaus den meisten Fällen zunächst ein H<sub>2</sub>-Molekül; bevor er darum an einem einzelnen H-Atom oder H-Atomion Lichtemission anregen kann, muß er diese Linienträger erst erzeugen, indem er aus einem H<sub>2</sub>-Molekül ein neutrales Atom oder unter gleichzeitiger Abspaltung eines Elektrons ein positives H-Atomion abtrennt. Unmittelbar mit dieser Erzeugung des Linienträgers ist jedenfalls in vielen Fällen eine Anregung seiner Zentren zu Schwingungen durch das stoßende Strahlenteilchen verknüpft. Damit also durch den Stoß eines Kathoden- oder Kanalstrahlenteilchens auf ein ruhendes H<sub>2</sub>-Molekül das H-Banden- oder H-Serienspektrum zur Emission gebracht werden kann, muß die kinetische Energie des Strahlenteilchens oberhalb eines Schwellenwertes liegen. Denn die Abtrennung eines H-Atoms oder Atomions von einem H<sub>2</sub>-Molekül verlangt eine bestimmte Arbeit. Diese, und damit der Schwellenwert der kinetischen Energie des Strahlenteilchens, ist für die Schaffung eines positiven H-Atomions aus einem H<sub>2</sub>-Molekül offenbar größer als die Arbeit, und damit der Schwellenwert der stoßenden Energie für die Abtrennung eines neutralen Atoms. Aus diesem Grund ist der Schwellenwert der Energie der Kathoden- und der Kanalstrahlen für die Anregung der Emission des Serienspektrums größer als für die Anregung des Bandenspektrums.

Ich möchte nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß die Erscheinung<sup>1)</sup> eines Schwellenwertes der stoßenden Energie für die Anregung einer Lichtemission wie schon frühzeitig<sup>2)</sup> von mir so auch von anderer Seite, z. B. von H. Rau<sup>3)</sup>, im Sinn der Leistung der Arbeit einer der Emission vorausgehenden Arbeit gedeutet worden ist. Die Hy-

1) Andere Fälle: Phosphoreszenzerregung durch Kathodenstrahlen, P. Lenard, Ann. d. Phys. 12, p. 449. 1903; Bewegte Intensität der H-Serienlinien, J. Stark, Physik. Zeitschr. 8, p. 913. 1907; 9, p. 767. 1908; Serienemission an festen Metallverbindungen, J. Stark u. G. Wendt, Ann. d. Phys. 38, p. 669. 1912; Fluoreszenz- und Phosphoreszenzerregung durch Kanalstrahlen, J. Stark u. G. Wendt, Ann. d. Phys. 38, p. 690. 1912; E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 48, p. 838. 1915.

2) J. Stark, Physik. Zeitschr. 5, p. 51. 1904.

3) H. Rau, l. c.

pothese der quantenhaften Lichtemission ist also zur Deutung jener Erscheinung nicht notwendig.

7. Anhang: Die H-Bandenlinien in den Kanalstrahlen werden nicht durch den Stoß der sekundären Kathodenstrahlen, sondern unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen zur Emission gebracht. — Gelegentlich von Versuchen, die ich über die Geschwindigkeit des Abklingens von Spektrallinien machte, hatte ich die Frage zu beantworten, ob die Emission der H-Bandenlinien in einem Kanalstrahlenbündel unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen oder durch den Stoß der von diesen erzeugten sekundären Kathodenstrahlen angeregt wird. Da in dieser Mitteilung mehrfach von der Anregung der  $H_2$ -Bandenlinien die Rede ist, so sei hier der Teil jener Versuche kurz mitgeteilt, welcher die aufgeworfene Frage zum Gegenstand hat.

Wie als bekannt vorausgesetzt werden darf, haben die von den Kanalstrahlen an gestoßenen Atomen zur Emission gebrachten sekundären Kathodenstrahlen in allen möglichen Richtungen Anfangsgeschwindigkeiten. Diese liegen, gemessen in Volt, zwischen 10 und 40 Volt. Da in diesem Geschwindigkeitsbereich primäre Kathodenstrahlen die H-Bandenlinien zur Emission bringen können, so ist dies auch für jene sekundären Kathodenstrahlen zu erwarten. Die von ihnen angeregte Emission dürfen wir zweifellos proportional ihrer Absorption in dem von ihnen durchlaufenen Gas setzen.

Um nun die aufgeworfene Frage zu beantworten, kann man folgende Überlegung anstellen. Eine 2 cm breite, 2 mm dicke Lamelle von H-Kanalstrahlen verlaufe in Wasserstoff von so niedrigem Druck (0,02 mm), daß die Lichtemission auf ihrem Wege noch erheblich ist. Gegenüber der Mitte der Lamelle, in einem Abstand (2 mm), der klein ist, verglichen mit ihrer Breite, ist dann die Intensität der sekundären Kathodenstrahlung nahezu unabhängig von dem Abstand und in erster Linie bedingt durch ihre Absorption im durchstrahlten Gas. Nach Lenard<sup>1)</sup> ist das Absorptionsvermögen  $\alpha$  von Kathodenstrahlen von 30 Volt Geschwindigkeit in Wasserstoff von 0,02 mm Druck gleich  $0,3 \text{ cm}^{-1}$ . Gemäß der Formel

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 732. 1903.

Annalen der Physik. IV. Folge. 49.

$J = J_0 e^{-\alpha d}$  beträgt somit die Intensität der sekundären Kathodenstrahlen gegenüber der Mitte der Kanalstrahlenlamelle im Abstand  $d = 0,2$  cm noch 94 Proz. der Intensität im Innern der Kanalstrahlenlamelle. Wenn also die Bandenemission innerhalb der Kanalstrahlenlamelle überwiegend von den sekundären Kathodenstrahlen angeregt wird, so kann ihre Intensität senkrecht von der Lamelle weg nur langsam mit dem Abstand von dieser abnehmen; sie muß bei dem gewählten Gasdruck außerhalb der Lamelle in 2 mm Abstand von ihr noch mindestens halb so groß sein wie innerhalb der Lamelle. Wenn indes in diesem Abstand die Intensität der Bandenlinien mehr denn 10 mal kleiner ist als innerhalb der Kanalstrahlenlamelle, so dürfen wir schließen, daß ihre Emission innerhalb der Lamelle zum größten Teile unmittelbar an den Stoß der Kanalstrahlen geknüpft ist und dort nicht durch die sekundären Kathodenstrahlen angeregt wird. Man beachte wohl die Abgrenzung dieser Schlußfolgerung. Würde die Intensität der Bandenlinien außerhalb der Lamelle der Kanalstrahlen nur wenig schwächer als innerhalb derselben sein, so würde damit noch nicht bewiesen sein, daß ihre Emission innerhalb und außerhalb von den sekundären Kathodenstrahlen angeregt wird. Denn es könnte ja sein, daß das Leuchten der Bandenlinien nach ihrer Anregung durch den Stoß der Kanalstrahlen sehr langsam abklingt, während ihre Träger dank ihrer thermischen Bewegung aus der Kanalstrahlenlamelle herausfliegen. Ist aber, wie es tatsächlich der Fall ist, die Bandenemission in 2 mm Abstand von der Kanalstrahlenlamelle mehr denn 10 mal schwächer als innerhalb dieser, so ist damit zugleich bewiesen, daß das Abklingen der Bandenlinien sehr rasch erfolgt und daß ihre Intensität innerhalb der Lamelle zum größten Teile nicht durch die sekundären Kathodenstrahlen angeregt wird.

In einer Mitteilung über die Geschwindigkeit des Abklingens der Serien- und Bandenlinien gedenke ich meine Versuchsanordnung ausführlich zu beschreiben. Hier genügen wohl folgende Angaben. In einer 4,5 cm weiten zylindrischen Röhre war als Kathode eine Aluminiumscheibe mit einem 2 cm langen, 2 mm breiten Schlitz angebracht. Die Röhre wurde horizontal zur Achse eines Spektrographen so aufgestellt, daß die Kanalstrahlenlamelle, welche aus dem Schlitz

in der Kathode austrat, senkrecht zur Achse des Spektrographen verlief und ihre Breitseite horizontal war. Die in einem Abstand von 5 mm von der Rückseite der Kathode liegende Partie der Kanalstrahlenlamelle wurde mit einem Objektiv scharf auf dem Spektrographenspalt abgebildet, die Kanalstrahlenlamelle also parallel ihrer Breitseite auf den Spalt projiziert. Der Spektrograph war ein lichtstarker Prismenapparat. Der Druck des Wasserstoffs in der Kanalstrahleröhre betrug während der Aufnahme ungefähr 0,02 mm, der Kathodenfall, welcher die Kanalstrahlen erzeugte, 12000 bis 15000 Volt. Das Resultat, das man unter diesen Bedingungen für die Bandenlinien des Wasserstoffs erhält, ist einfach; wenn diese nämlich innerhalb des Bildes der Kanalstrahlenlamelle bereits normal geschwärzt erscheinen, ist außerhalb dieses Bildes in 2 mm Abstand von der Lamelle noch keine Schwärzung wahrzunehmen. Hier ist also die Intensität der H-Bandenlinien mehr denn 10mal kleiner als innerhalb der Kanalstrahlenlamelle.

Aus diesem Resultat ist auf Grund der obigen Überlegungen der Schluß zu ziehen, daß die Emission der H-Bandenlinien innerhalb eines Kanalstrahlenbündels für ihren größten Teil unmittelbar an den Stoß der Kanalstrahlen auf ruhende Gasatome, nicht an den Stoß der sekundären Kathodenstrahlen geknüpft ist. An die Feststellung dieses Resultates möchte ich ausdrücklich zur Vermeidung von Mißverständnissen die Bemerkung knüpfen, daß mit ihm nicht behauptet werden soll, daß die sekundären Kathodenstrahlen überhaupt nicht imstande seien, durch ihren Stoß Bandenemission anzuregen, sondern nur, daß die Intensität dieser Emission, wenn sie überhaupt da ist, nur ein kleiner Bruchteil der Emission der Kanalstrahlen selbst auf ihrem Wege ist. Es ist möglich, daß ein Teil der schwachen Emission<sup>1)</sup>, welche in ihrer Gesamtintensität für das Auge eben wahrnehmbar bei niedrigem Gasdruck ein Kanalstrahlenbündel umgibt, von den sekundären Kathodenstrahlen herrührt.

Zum Schlusse möchte ich Herrn W. Wien, mit dem ich über einige Punkte dieser Mitteilung einen Briefwechsel ge-

1) Vgl. E. Goldstein, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 4, p. 228. 1902.

führt habe, für wertvolle Hinweise danken; sie waren mir  
der Anlaß, einige Abschnitte ausführlicher zu behandeln und  
auch den Anhang in Abschnitt 7 gleich hier mitzuteilen.

Aachen, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.  
Dezember 1915.

(Eingegangen 21. Dezember 1915.)

5. Über eine neue Versuchsanordnung zur Prüfung  
der menschlichen Hörschärfe für reine Töne  
beliebiger Höhe;  
von Johannes Walther Birnbaum.

---

**Einleitung.**

Zur Beantwortung zahlreicher Fragen medizinischer und physiologischer Natur ist es von wesentlicher Bedeutung, eine Methode zu besitzen, die in einwandfreier und physikalisch exakter Weise das menschliche Hörvermögen für reine Töne beliebiger Höhe vergleichend zu messen gestattet.

Die menschliche Hörschärfe wird am einfachsten festgestellt durch Anwendung einer *Reizschwellenmethode*. Man definiert die „Empfindlichkeit“ des Ohres für einen bestimmten Ton als den reziproken Wert des „Schwellenwertes“, d. i. diejenige Schallenergie, die das Ohr gerade noch nachzuweisen imstande ist.

Die *absolute* Bestimmung dieses Schwellenwertes für reine Töne beliebiger Höhe ist eine schwierige Aufgabe, die zu übereinstimmenden Resultaten noch nicht geführt hat.

Da nun aber der Schwellenwert für einen bestimmten Ton für normalhörige Ohren im Durchschnitt als recht konstant bezeichnet werden kann, genügt es für die praktischen Zwecke der Medizin und Physiologie, den Schwellenwert des normalhörigen Ohres mit dem des kranken zu vergleichen und das Verhältnis beider Schwellenwerte als Maß für die Hörschärfe einzuführen.

Die in der ohrenärztlichen Praxis angewandten Stimmgabelmethoden, bei denen der Schwellenwert durch möglichst gleich starkes Anschlagen einer Stimmgabel in verschiedenen Entfernnungen vom Ohr festgestellt werden soll, reichen zwar für viele medizinische Zwecke aus, für exakte physiologische Messungen sind sie indessen nicht genügend; denn selbst, wenn das dabei vorausgesetzte Gesetz über die Abnahme der Schall-

intensität umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung im geschlossenen Raum erfüllt wäre, so würde doch die Tonintensität so von der individuellen Art des Anschlagens, von Bau der Stimmgabel usw. abhängen, daß die Beobachtungen verschiedener Experimentatoren nicht miteinander vergleichbar blieben. Wie aber längst feststeht, gilt das quadratische Gesetz im geschlossenen Raum absolut nicht.

Die exakte Methode bleibt immer noch die „Hartmann-Bezoldsche“ Stimmgabelmethode in ihrer verbesserten Form von Edelmann und Bezold.<sup>1)</sup> Es wird bei ihr an der beobachteten Abklingungszeit einer angeschlagenen Stimmgabel unter Berücksichtigung des exponentiellen Charakters der Dämpfung auf die Amplitude des Schwellenwertes geschlossen. Indessen leidet die Methode noch an folgenden Mängeln. Einmal ist eine gewisse Übung zur genauen Angabe des Zeitpunktes erforderlich, in dem der Ton der verklingenden Stimmgabel nicht mehr gehört wird. Zweitens muß die Abklingungszeit der Stimmgabel groß sein. Für hohe Stimmgabeltöne, deren Abklingungszeiten für gewöhnlich ja kleiner sind, wird die Methode also ungenau. Drittens macht die Forderung einer stets gleich großen Anfangsamplitude eine besondere Apparatur uötig. Viertens muß für eindeutige Schallzuführung und peinlichste Abdämpfung aller Nebengeräusche gesorgt sein. Ob — besonders bei tiefen Tönen — nur der Grundton der Stimmgabel wahrgenommen wird, ist fraglich.

Prinzipiell besser scheint eine Methode zu sein, bei der auf das Verschwinden eines Tones eingestellt wird, der einmal beliebig oft in gleicher Intensität wiederholt werden kann, dessen Intensität andererseits innerhalb weiter Grenzen in bekanntem Verhältnis verändert werden kann.

Ein auf diesem Prinzip beruhender Apparat zur Hörschärfemessung, der sich in der Praxis einbürgern soll, muß folgende Vorbedingungen erfüllen.

Er soll einfach im Prinzip, in der technischen Ausführung

---

1) Th. Edelmann u. W. Bezold, Verhandlgn. d. deutsch. ontolog. Gesellsch., Würzburg 1898, p. 24.

und Handhabung sein. Er muß schnelles und dabei doch exaktes Arbeiten zulassen.

Von speziellen Anforderungen sind an ihn zu stellen: Er muß gestatten, reine Töne zu erzeugen, deren Intensität im Verhältnis  $1:10^8$  (Schwellenwert = 1) auf physikalisch exakt meßbare Weise verändert werden kann. Die Schallzuführung zum Ohr muß eindeutig sein (nur Luftleitung, keine Knochenleitung).

Der Hauptpunkt, die Möglichkeit der physikalisch exakten Intensitätsabstufung ist bei sämtlichen einfachen Tonquellen — Pfeifen, Sirenen, Stimmgabeln — nicht erfüllt, weil es schwierig, wenn nicht gar unmöglich ist, auf mechanischem Wege die Tonintensität in so großem Intervall genau zu regeln.

Nun besitzen wir aber im *Telephon* eine Tonquelle, deren Intensität aufs genaueste abgestuft werden kann. Beschickt man ein *Telephon* mit einem Wechselstrom, so zeigt sich, daß innerhalb weiter Grenzen die Plattenamplitude stets der Stromamplitude proportional bleibt. Die Stromamplitude ist aber auf elektrischem Wege in mannigfacher Weise exakt abstufbar.

Es scheint somit das Hörtelephon wie keine andere Tonquelle für Hörschärfemessungen (Bestimmung der „*Telephonempfindlichkeit*“) geeignet zu sein. Voraussetzung für die Verwendbarkeit ist die *Reinheit* der Telephontöne.

Max Wien<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß man durch Zwischen-schaltung eines Resonators zwischen Platte und Ohr eine weitgehende Reinigung erzielen kann. Telephontöne, deren Reinigung allerdings nur auf elektrischem Wege erfolgte (elektrische Resonanz), wurden schon 1902<sup>2)</sup> zur relativen und absoluten Hörschärfemessung verwendet. Indessen war die zur Erzeugung der Wechselströme für das *Telephon* nötige Apparatur für die ohrenärztliche Praxis noch nicht einfach genug.

Nach einem neueren Vorschlag von M. Wien<sup>3)</sup> eignen sich aber in hervorragendem Maße zur Erzeugung von solchen Telephontönen die gedämpften elektrischen Schwingungen, wie sie bei Kondensatorenentladungen entstehen. Die Vorteile dieser Erzeugungsart von Wechselströmen gegenüber anderen Wechsel-

1) M. Wien, Physik. Zeitschr. 13. p. 1034. 1912.

2) M. Wien, Pflügers Archiv 97. p. 1.

3) M. Wien, Physik. Zeitschr. 13. p. 1034. 1912.

stromquellen (Sirenen, Summer, singender Lichtbogen usw.) sind: einfache, handliche Apparatur, leichte Abstimmbarkeit, konstante Frequenz und sinusförmiger Stromverlauf. Allerdings entsteht dabei nur ein kurzer, mehr oder weniger stark gedämpften Ton. Es überwiegen aber die genannten Vorteile bei weitem diesen Nachteil; vielleicht ist sogar die Intermittenz des Tones für eine genaue Ermittelung des Schwellenwertes günstiger, als ein kontinuierlicher Ton.

#### Das Prinzip der Anordnung.

Unter Leitung von Herrn Prof. Max Wien und mit dem medizinischen Beirat von Herrn Prof. Brünings, Privatdozenten für Ohrenheilkunde Jena, wurde im hiesigen Institut eine Versuchsanordnung für Hörschärfemessungen zusammengestellt, deren Grundgedanken folgende sind.

Entlädt man einen Kondensator von der Kapazität  $C$  über eine Selbstinduktion  $L$ , so entstehen gedämpfte elektrische Schwingungen von der Schwingungszahl

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}.$$

Mit diesen gedämpften Wechselströmen wird ein Telephon beschickt; der dabei entstehende, durch Platten- und Luftresonanz gereinigte Telephonton wird durch Luftleitung (Stethoskop) dem Ohr zugeführt und auf elektrischem Wege bis zum Minimum perceptible des kranken bzw. normalen Ohres geschwächt. Das Verhältnis beider Schwellenwerte gibt, wie sonst, ein Maß für die Hörschärfe.

Der im Telephon entstehende Ton ist zuerst stark gedämpft und mit Obertönen verunreinigt. Zur Herabsetzung der Dämpfung, zur Reinigung von Obertönen, vor allem zur Vermeidung des „Knackens“ der Telephonplatte (s. u.) kommt bei vorliegender Anordnung *mehrmalige Resonanz* zur Anwendung: Auf das elektrische schwingende System ist die Platte des Telefons abgestimmt, der Luftresonator wieder auf den Eigenton der Platte. Die elektrischen und akustischen Systeme sind so lose miteinander gekoppelt, daß durch Auftreten gekoppelter Schwingungen keine Komplikationen entstehen können.

Diese Anordnung entspricht in der Hauptsache den eingangs gestellten Bedingungen.

Der Apparat ist vorläufig für die 3 Töne

$$c (128), \quad c_2 (512), \quad c_4 (2048),$$

wie sie dem Stimmumfang der menschlichen Sprache am meisten entsprechen, ausgebaut. Einer Erweiterung der Tonskala innerhalb der Intervallen und für *tiefere* Schwingungszahlen stehen keinerlei Schwierigkeiten entgegen, die Anwendung jedoch auf *höhere* Töne ist nicht ohne weiteres möglich (s. u.).

Die Apparatur zerfällt in 2 Teile: ein elektrisches System, das den elektrischen Schwingungskreis und die Vorrichtung zur Änderung der Intensität enthält, und in ein akustisches System, bestehend aus den Telephonen mit den Resonatoren.

#### § 1. Das elektrische System.

##### A. Der Schwingungskreis.

Will man Kondensatorentladungen zur Erregung von Telephontönen verwenden, so hat man zunächst auf kleine Dämpfung des Kreises zu achten. Bei zu starker Dämpfung ist einmal die Energieausbeute nur klein, dann aber werden vor allem im Telefon durch den mehr stoßartigen Charakter der Kondensatorentladungen sämtliche Eigentöne der Platte mit erregt, die sich durch ein „Knacken“ im Ton bemerkbar machen.

Vorversuche mit gewöhnlichen Schwingungskreisen zeigten, daß die dadurch resultierende Verunreinigung des Tones durch Luftresonanz allein nicht zu beheben ist. Es bleibt trotz angewandter Resonatoren stets ein harter Stoß im Telephonklang bei der Entladung bestehen. Für die spezielle Verwendung solcher Telephontöne zu Gehörprüfungszwecken ist ebenfalls zur Erzielung eines möglichst lang anhaltenden Tones schwache Dämpfung erwünscht.

Bei dem elektrischen Schwingungskreis erreicht man diese nun hauptsächlich durch Wahl möglichst verlustfreier Spulen und Kondensatoren. Die Gesichtspunkte, nach denen dabei zu verfahren ist, sind Fragen rein elektrischer Natur. Sie sind in einer weiteren Abhandlung<sup>1)</sup> gesondert behandelt.

1) Die Veröffentlichung dieser Arbeit soll später erfolgen.

Unter Beobachtung der dort angegebenen Punkte wurde für den Schwingungskreis als Selbstinduktion eine eisenfreie Spule von quadratischem Wickelungsquerschnitt (Fig. 1) mit folgenden Dimensionen verwendet:

Innerer Spulenradius 9 cm,  
Äußerer „ 16 „

Seite des quadratischen Wickelungsquerschnittes 7 cm.

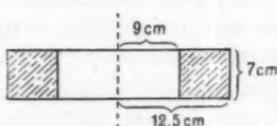


Fig. 1.

Zur Bewickelung kamen 550 m einer Emailledrahtlitze in Anwendung. Da die Spule noch für andere Versuche mit wesentlich höheren Schwingungszahlen verwendet werden sollte, wurden, um die Kapazität der Spule nach Mög-

lichkeit herabzudrücken, je ca. 90 cm des Drahtes in Form einer Flachspule gewickelt. Die sechs Flachspulen aneinander gelegt, ergaben dann die gewünschte Spulenform von quadratischem Wickelungsquerschnitt.

Um ferner eine Möglichkeit der kontinuierlichen Veränderung der Selbstinduktion zum Zwecke der Einstimmung zu behalten, wurden je 3 Flachspulen zu einer Spule zusammengefaßt. Jede dieser beiden Hälften wurde mit Isolierband umwickelt und mit Seidenbändern auf einem Brett befestigt, das am Rande auf Hartgummiplatten die Polklemmen zu den Spulenenden trug. Beide Bretter mit den Spulenhälften waren drehbar gegeneinander angeordnet, so daß mittlerer Abstand und damit die Selbstinduktion der Spulen bequem geändert werden konnte (vgl. Fig. 4, 5).

Bei einer definitiven Ausführung wird man auf die Variationsmöglichkeit der Selbstinduktion verzichten können und wird am besten die Spule auf einem passend ausgedrehten Holzkern aufwickeln, den man vorher in Paraffin auskocht, um späteres Verziehen zu vermeiden.

Die Selbstinduktion der Spule betrug im Maximum bei Hintereinanderschaltung aller Rollen  $1,166 \cdot 10^8$  cm, der Gleichstromwiderstand 6,18 Ohm (beides in der Brücke gemessen).

Als Kapazitäten kamen für den Ton 2048 Glimmerkondensatoren, für die tiefen Töne 512, 128 Papierkondensa-

## Prüfung der menschlichen Hörschärfe für reine Töne. 207

toren zur Verwendung, deren Größe sich nach der Formel

$$2\pi n = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

bei einer Selbstinduktion

$$L = 1,166 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

berechnet zu

0,052	Mf.	für den Ton	2048
0,83	"	"	512
13,3	"	"	128.

Die Schaltung, in der Spulen und Kondensatoren zur Erzeugung der Schwingung verwendet wurden, gibt die Schaltungsskizze Fig. 2 wieder. Die Belegungen des Kondensators  $c$  werden mit einer Wippe über einen Sicherheitswiderstand  $s$ , (Glühlampe oder dgl.) mit einer Gleichstromspannung  $V$  verbunden. Beim jedesmaligen Umlegen der Wippe setzt über die Selbstinduktion  $L$  die oszillatorische Entladung ein.

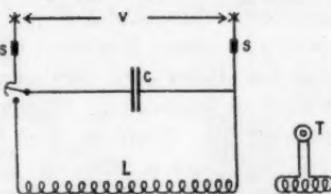


Fig. 2.

Die Periode der Schwingungen lässt sich leicht durch ein Telefon  $T$  kontrollieren; man wird dieses dazu nicht direkt in den Kreis einschalten, weil dadurch die Dämpfung außerordentlich erhöht würde, sondern es an eine zweite kleinere Spule anschließen, die mit  $L$  induktiv gekoppelt ist.<sup>1)</sup>

Durch Wahl geeigneter Spulen und Kondensatoren gelang es, das logarithmische Dekrement des Kreises auf

$$\begin{aligned} 0,26 &\quad \text{für } n = 128 \\ 0,084 &\quad " \quad n = 512 \\ 0,0306 &\quad " \quad n = 2048 \end{aligned}$$

herabzudrücken. (Diese Werte wurden auf eine besondere Methode bestimmt, die später [vgl. Bemerkung p. 205] beschrieben werden soll).

Es dauert demnach bei

$$\begin{aligned} n = 128 \text{ ca. } 4 \text{ Schwingungen oder } \frac{4}{128} &= 0,031 \text{ sec} \\ n = 512 \text{ " } 12 &\quad " \quad \frac{12}{512} = 0,023 \text{ sec} \\ n = 2048 \text{ " } 32 &\quad " \quad \frac{32}{2048} = 0,0156 \text{ sec} \end{aligned}$$

1) Vgl. R. Colley, Wied. Ann. 26. p. 482. 1885.

bis die Anfangsamplitude auf den  $e^{ten} = 2,17^{ten}$  Teil sinkt. Es erwiesen sich bei allen drei Tönen diese Dekrete als klein genug, um im abgestimmten Telephon den anfangs auftretenden Stoß zu beseitigen. Der Ton klingt weich und rein an.

#### B. Der Unterbrecher.

Sollen nun diese Schwingungen für Meßzwecke Verwendung finden, so ist erstes Erfordernis Konstanz der Anfangsamplitude jeder einzelnen Entladung. Bei Verwendung einer gewöhnlichen Quecksilberwippe zum Laden und Entladen des Kondensators zeigt nun schon das Telephon, namentlich nach längerem Gebrauch der Wippe, Unregelmäßigkeiten an, die auf einen unsauberer Kontakt zurückzuführen sind. Wesentlich ist also bei dieser Art der Schwingungserzeugung die Güte des Schließungskontaktes. Wegen der Wichtigkeit dieses Punktes machte sich hierüber noch eine gesonderte Untersuchung nötig (vgl. Bem. p. 205). Sie führte schließlich zur Wahl eines Unterbrechers, bei dem die kapillaren Eigenschaften des Quecksilbers benutzt werden, und der keinen Sauerstoff enthält, so daß trotz des Funkens die Oberfläche rein bleibt.



Fig. 3a.

Er besteht aus einem evakuierten Glasgefäß (Fig. 3a), das zum Teil mit Quecksilber gefüllt ist; kippt man das Gefäß, so stellt das ineinander fließende Quecksilber den Schließungskontakt her, der sich durch außerordentliche Konstanz — auch im Dauerbetrieb — auszeichnet. Die Aufladung des Kondensators geschieht durch einen Platinkontakt. Beide Kontakte werden durch Anordnung auf einem Hebeltaster zwangsläufig bedient (vgl. Fig. 3b).

Die l. c. wiederzugebende Untersuchung ergibt, daß bei Verwendung von Ladespannungen bis zu rund 400 Volt die Intensitätsschwankungen der einzelnen Entladung  $\frac{1}{2}\%$  nicht überschreiten. Diese Schwankungen sind aber unvermeidlich

und auch für Gehörprüfungen belanglos. Intensitätsschwankungen werden ja erst fürs Ohr bemerkbar, wenn sie 15 bis 20% überschreiten.

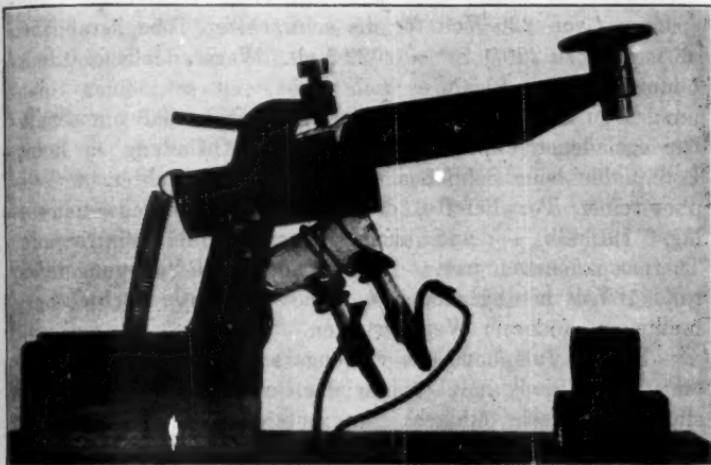


Fig. 3 b.

### C. Die Vorrichtungen zur Intensitätsvariierung.

Die Schwächung der Schallenergie im Telephon bis zum Schwellenwert sollte also durch Variierung der elektrischen Energie im Telephon geschehen. Die dabei gemachte Voraussetzung, daß die akustische Energie stets proportional der elektrischen Energie bleibt, bedarf allerdings der Prüfung. Wie später gezeigt werden wird, ist diese Voraussetzung in sehr weiten Grenzen erfüllt.

Für diese Intensitätsvariierung erschien es am einfachsten, die Ladespannung des Kondensators zu verändern. Die auschwingende elektrische Energie ist proportional dem Quadrat der Ladespannung. Hat man eine feste Spannung von bestimmter Voltzahl, so verbindet man zu diesem Zwecke die Pole der Batterie mit einem großen Widerstand, von dem man genau meßbare Spannungen abnehmen kann (Potentiometer, vgl. Schaltungsskizze Fig. 5, p. 214).

Um auch für stärkere Grade von Schwerhörigkeit den Apparat verwenden zu können, soll er gestatten, die Ton-

intensität vom Schwellenwert des normalhörigen Ohres bis zum ca. 10<sup>8</sup>fachen Werte dieses Betrages zu verändern. Will man diese Variation durch bloßes Verändern der Ladespannung erreichen, so würde man z. B. bei einer maximalen Ladespannung von 220 Volt für die schwächsten Töne herabgehen müssen bis zu  $220/\sqrt{10^8} = 0,022$  Volt. Wegen der Rückstandsbildung usw. empfiehlt es sich nicht, mit so kleinen Spannungen zu arbeiten. Es zeigte sich nämlich, daß ein scheinbar entladener Papierkondensator nach Aufladung zu hohen Potentialen beim Schließen des Entladungskontaktes im Telefon einen Ton lieferte, der weit über dem Schwellenwert lag. Deshalb — und auch wegen eventuell auftretender Thermospannungen usw. — durfte nur bis zu Spannungen von rund 1 Volt herabgegangen werden. Die weitere Schwächung mußte auf anderem Wege erfolgen.

Da die Telephone aus eingangs erwähntem Grund durch eine zweite Spule induktiv mit der Selbstinduktion gekoppelt sind, ist es sehr einfach, zur weiteren Tonschwächung die Koppelung der Spule zu verändern.

Zu diesem Zwecke wurde anfänglich nur die Entfernung beider Spulen geändert. Dabei zeigte sich, daß bis zum vollen Verschwinden des Tones die Spule des Telephonkreises bis auf 1,5 m von der Selbstinduktionsspule des Schwingungskreises entfernt werden mußte. Diese Länge hätte der Anordnung zu große Dimensionen gegeben. Die Koppelung läßt sich nun auch wie beim Variometer durch Drehen der Spule verändern. Auch diese Methode führte jedoch nicht zum Ziele, weil die Stellungen der Spule für die schwächsten Töne, deren Intensitäten sich wie 1 : 10 : 100 verhielten, sich so wenig voneinander unterschieden, daß eine genaue Einstellung auf Zwischenwerte schwierig erschien.

Es wurde deshalb eine Koppelungsvariation gewählt, bei der — ähnlich wie bei den Empfängern in der drahtlosen Telegraphie — die Spule gleichzeitig entfernt und gedreht werden konnte (vgl. Fig. 4). Zu diesem Zwecke war die Spule mit einem gegen die Spulenachse um 45° geneigten, hölzernen Hebelarm von ca. 20 cm Länge starr verbunden. Bei Drehung um den Punkt *P* wurde die Spule gleichzeitig entfernt und gedreht.

Die *Eichung* der Koppelungsvariation nach Energieverhältnissen geschah auf folgendem Wege.

Durch die Selbstinduktionsspule konnte aus einer Akkumulatorenbatterie ein Gleichstromstoß geschickt werden. Die Koppelungsspule wurde mit einem Galvanometer verbunden. Beim Schließen oder Öffnen des Gleichstromes in der ersten Spule zeigt dann das Galvanometer ein von der Größe der Koppelung abhängiges Stromintegral an, das der Quadratwurzel der jedesmal durch Induktion übertragenen Energie proportional ist. Sinkt also von einer Koppelungsstellung zur anderen das Stromintegral auf den 10. Teil, so beträgt die in der 2. Stellung übertragene Energie nur noch den 100. Teil. Durch Messung der Stromintegrale gelingt es somit leicht, die Stellungen der Koppelungsspule nach Energieverhältnissen zu eichen.

Hierbei hat man besonders bei den Stellungen für die schwächsten Intensitäten streng darauf zu achten, daß keine direkte Induktion auf die Galvanometerleitungen stattfindet, man führt diese deshalb verdrillt und überzeugt sich bei abgenommener Koppelungsspule davon, daß keine direkte Induktion stattfindet.

Die so geeichte Koppelungsskala gestattete eine kontinuierliche Veränderung der induzierten Energie im Verhältnis  $1:10^6$ . Die Skalenteile verteilten sich bei dieser Anordnung ziemlich gleichmäßig auf den Kreisbogen. Da durch die Spannungsänderung außerdem eine Schwächung der Energie im Verhältnis  $1:10^5$  vorgesehen war, konnte die elektrische Energie im Telephon bis auf den  $10^{10}$ ten Teil der Maximalintensität kontinuierlich verändert werden.

Somit reichte die Schwächung über die normale Reizschwelle hinaus, so daß auch für Überhörigkeit Skalenteile vorhanden waren.

Bei der Stellung der Koppelungsskala, die der Maximalintensität entsprechen sollte, war darauf zu achten, daß nicht etwa durch zu enge Koppelung eine Veränderung der Selbstinduktion des Schwingungskreises eintritt. Man kann dies leicht an der Tonhöhe eines an die Koppelungsspule gelegten Telefons kontrollieren, die sich bei Veränderung der Koppelung nicht ändern darf. Noch schärfer entscheidet darüber

ein Telephon mit Luftresonator (s. u.), das nur auf die Eigenschwingung anspricht und gegen Verstimming sehr empfindlich ist.

Damit nur zwischen beiden Spulen induktive Wirkungen zustande kommen, war es nötig, die Teile des Schwingungskreises, in denen sonst noch Wechselströme flossen (Zuleitungen zu den Kondensatoren, Taster usw.), jenseits der Selbstinduktion zu montieren. (Fig. 4, linke Seite.)

Die ausschwingende elektrische Energie für den Ton 128, bei dem jedesmal 13,8 Mf. entladen wurden, erwies sich als ausreichend für eine direkte Nachprüfung der mit Gleichstromstößen geeichten Koppelungsskala. Zu diesem Zwecke wurde in den fertigen Telefonkreis ein Detektor mit Galvanometer eingeschaltet. Der ballistische Ausschlag des Galvanometers bei jeder periodischen Kondensatorentladung blieb innerhalb der Ablesefehler stets der gleiche, wenn Koppelung und Ladespannung in entgegengesetzt gleichem Verhältnis geändert wurden.

#### Die Bezeichnung der Koppelungsskala.

Um in der Praxis nicht mit zu großen Zahlen operieren zu müssen, wurden die Skalenteile der Koppelungsskala, ebenso wie die des Spannungswählers, nicht mit den Energieverhältnissen selbst, sondern mit dem Briggschen Logarithmus vom Verhältnis der Maximalintensität zu der betreffenden Intensität bezeichnet. Die Verwendung einer logarithmischen Skala für den Reiz rechtfertigt sich ja auch nach dem Weber-Fechnerschen Gesetz.

Die Stellung für die Maximalintensität erhielt also die Ziffer 0, die Stellungen, in denen die Energien nur noch  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$  ... der Maximalintensität betrugen, bekamen die Zahlen 1, 2, 3 .... Der Schalter, der die Ladespannung variierte, bestand aus 5 Kontakten, von denen man Spannungen abnehmen konnte, die sich wie  $\sqrt{10^5} : \sqrt{10^4} : \sqrt{10^3} : \dots$  verhielten, es verhalten sich dann die elektrischen Energien wie  $10^5 : 10^4 : 10^3 : \dots$ . Die Kontakte erhielten entsprechend die Ziffern 0, 1, 2, ....

Für eine definitive Ausführung werden die Zwischenstufen des Spannungswählers nicht nötig sein, da schon die

Koppelungsvorrichtung eine kontinuierliche Veränderung erlaubt.

Bei der praktischen Verwendung hat man also nur für den betreffenden Schwellenwert die durch Spannungswähler und Koppelungsskala angezeigten Ziffern zu addieren. Die Differenz mit der auf gleiche Weise erhaltenen Zahl für den normalen Schwellenwert gibt den Logarithmus des Verhältnisses Schwellenwert krank Schwellenwert normal.

Diese Zahl selbst kann schon als Maß für den Grad der „Schwerhörigkeit“ betrachtet werden. Eine Umrechnung dieses Wertes auf den reziproken Wert der „Hörschärfe“ kann durch Tabellen oder Kurven erleichtert werden (§ 4).

Fig. 4 zeigt die Anordnung des elektrischen Systems im Grundriß. Links von der großen Selbstinduktion  $L$  befinden

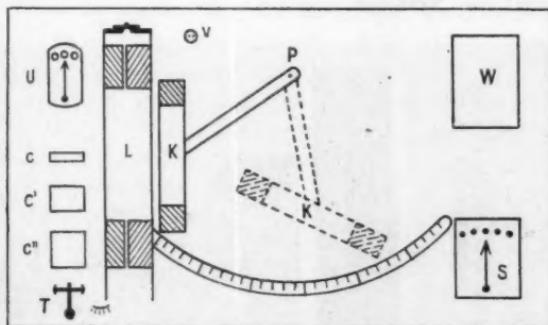


Fig. 4.

sich die Kondensatoren  $C$  und der Taster  $T$ . Die Kondensatoren bestehen aus drei Gruppen zu 0,052 Mf. (Glimmer) 0,778 (Papier) und 12,47 Mf. (Papier). Durch einen Umschalter  $U$  können die Kondensatoren je nach der gewünschten Schwingungszahl parallel geschaltet werden.

Die Selbstinduktion von  $1,166 \cdot 10^8$  cm gibt mit

- 0,052 Mf. eine Schwingungszahl von 2048,
- $0,052 + 0,778$  eine Schwingungszahl von 512,
- $0,052 + 0,778 + 12,47$  eine Schwingungszahl von 128.

Rechts von der Selbstinduktion befindet sich die Koppelungsspule  $k$ , ein Steckkontakt  $v$ , der zur Gleichstrom-

spannung führt, ferner eine Sicherungsglühlampe, der Abzweigwiderstand  $W$  (Schniewindtscher Asbestwiderstand zu

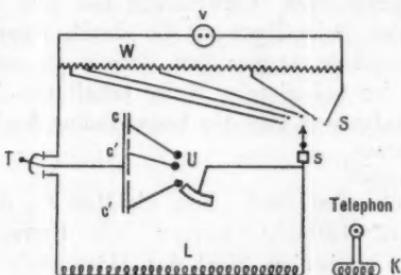


Fig. 5.

$4000 \Omega$ ) und der dazu gehörige Spannungswähler  $S$ . Fig. 5 gibt das Schaltungsschema der Anordnung, Fig. 6 eine Gesamtansicht des Systems.



Fig. 6.

### § 2. Das akustische System.

Das akustische System soll die ausschwingende elektrische Energie in Schallenergie umsetzen. Dabei muß der Nutzeffekt ein guter sein; denn es soll ja für jeden Ton die maximal verfügbare Schallenergie den  $10^6$ fachen Betrag des Schwellen-

wertes erreichen. Es galt also zunächst genügend empfindliche Telephone zu konstruieren.

Die eben beschriebene Vorrichtung zur Variierung der elektrischen Energie in Verbindung mit dem Schwingungskreis gestattet, jedes Telephon daraufhin quantitativ zu untersuchen.

Ferner muß der Ton *rein* und *schwach gedämpft* sein.

Um allen diesen Anforderungen gerecht zu werden, konnten nur Monotelephone, d. h. Telephone mit ausgesprochenem Eigenton zur Verwendung kommen. Bei gewöhnlichen Telefonen werden mit Fleiß die Eigentöne nach Möglichkeit unterdrückt und deshalb die Platten stark gedämpft.

Eine weitere Herabsetzung der Dämpfung und Reinigung des Tones für das beobachtende Ohr wird dadurch erreicht, daß zwischen Platte und Ohr *Luftresonatoren* eingeschaltet werden. Hierzu eignen sich für tiefe Töne bis etwa 500 offene Helmholtzsche Kugelresonatoren. Für höhere Töne verwendet man besser geschlossene Kugelresonatoren.<sup>1)</sup> Offene Kugelresonatoren mit hohen Grundtönen besitzen keine genügend reinigende Wirkung mehr.<sup>2)</sup> Überall geschlossene Kugelresonatoren zu verwenden, empfiehlt sich nicht, weil für tiefe Töne die Dimensionen der Resonatoren sehr groß ausfallen. Demgemäß wurden 2 Typen konstruiert.

- A. Monotelephone für tiefe Töne mit offenen Resonatoren (128 und 512).
- B. Monotelephone für höhere Töne mit geschlossenen Resonatoren (2048).

#### A. Monotelephone für 128 und 512.

Monotelephone sind zuerst wohl von Mercadier<sup>3)</sup> für telegraphische Zwecke verwendet worden. Sie bestanden aus runden Platten, die in der Mitte erregt, in 3 Punkten der kreisförmigen Knotenlinie auf Korkspitzen ruhten und frei schwangen. Verschiedene Versuche mit solchen kreisrunden und auch rechteckigen Platten, die stets in den Knotenlinien unterstützt frei schwangen, erwiesen die Brauchbarkeit dieser

1) M. Wien, Physik. Zeitschr. 13. p. 1084. 1912.

2) H. Helmholtz, Tonempfindungen, 6. Ausgabe, p. 602.

3) E. Mercadier, Comptes rendus 104. p. 970—972. 1887.

Art von Membranen für Laboratoriumszwecke. Indessen zeigt sich, daß solche Platten, sollten sie schwach gedämpft schwingen, in den Knotenlinien nur lose aufliegen durften. Da es nicht gelang, die Platten, wie es für die Praxis nötig ist, auf einer Unterlage so stabil zu befestigen, daß ihre Dämpfung zugleich konstant geblieben wäre, wurden rings eingespannte Wellblechmembrane aus Neusilber (0,1 mm Durchmesser) gewählt, deren Mitten durch aufgeschraubte Eisenbleche beschwert wurden. Die Einstimmung und Dämpfung hält sich nach den Erfahrungen mit dem optischen Telephon ausgezeichnet. Die Erregung der Platte geschah durch einpolige Magnete.

Um Verluste durch Wirbelströme in den Magneten möglichst einzuschränken, wurden als Telephonmagnete durchgängige Elektromagnete mit unterteiltem Eisenkern (0,1 mm Transformatorenblech) verwendet.<sup>1)</sup> Damit ist erstens eine bedeutende Tonverstärkung gegenüber dem gewöhnlichen Telephon verbunden, dann aber bleibt auch die geforderte Proportionalität zwischen elektrischer und akustischer Amplitude in weiteren Grenzen gewahrt, da das Zusatzfeld, auch für stärkere Töne, immer noch klein bleiben wird gegenüber dem starken Hauptfeld.

Allerdings ist für den Erregerstrom der Telephonmagnete eine gesonderte 2-Volt-Akkumulatorenbatterie nötig. Bei Verwendung der Netzspannung einer städtischen Kraftleitung zur Erregung der Telephonmagnete hört man im Telephon dauernd Nebengeräusche, die von Spannungsschwankungen herrühren und eine präzise Einstellung auf den Schwellenwert unmöglich machen. Eingeschaltete Drosselpulen vermindern zwar die Geräusche, beseitigen sie aber nicht. Vielleicht gelingt es noch, empfindliche Monotelephone mit permanenten Magneten zu konstruieren. Versuche in dieser Richtung sind im Gange. Der Erregerstrom bei allen 3 Telefonen betrug 0,6 Ampere, stärkere Primärfelder verstärken wohl den Ton, erhöhen aber gleichzeitig die Dämpfung der Platte.

Die Durchmesser der Membrane für 128 bzw. 512 trugen 8 bzw. 5 cm. Sie wurden zunächst zwischen Messingringen fest eingespannt. Pappeinlagen zwischen Membran und

---

1) Vgl. W. Kunze, Archiv für Elektrotechnik 1915. Verlag J. Springer, Berlin.

Ringen verhüteten klirrende Geräusche. Die Telephone hatten ca.  $12 \Omega$  Widerstand.

Die starken Exkursionen — besonders der 128-Platte — bei den stärksten Tönen erforderten eine sehr stabile Befestigung der Membran, wenn nicht die ganze Einspannvorrichtung ins Mitschwingen geraten sollte. Die Messingringe mit den Membranen wurden deshalb an einem rechteckigen Bleirahmen (2·10·20 cm) mit passenden runden Öffnungen angeschraubt. Bei dieser Befestigungsart schwangen die Membrane mit ausgesprochenem Eigenton frei und ziemlich schwach gedämpft.

Die zur weiteren Reinigung verwendeten Resonatoren waren vor den Membranen frei aufgestellt. Sie bestanden aus passendem Zinkblech- bzw. Glaskugeln mit veränderlichen Öffnungen, die eine leichte Abstimmung auf den Plattenton ermöglichten.

$R_1$ ,  $R_2$  Resonatoren  
 $S_1$  Erregerspulen  
 $S_2$  Telephonspulen  
 $m$  Telephonmembran

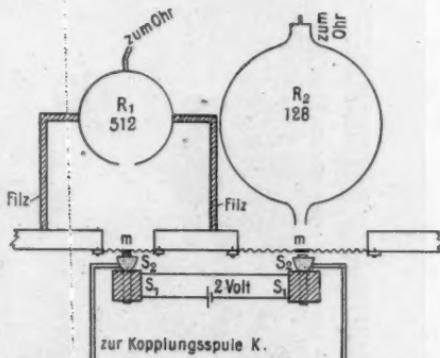


Fig. 7.

Bei dem Resonator 512 wurde beobachtet, daß allzu kleiner Abstand — enge Koppelung — zwischen Platte und Resonator den Ton verstärkt, aber gleichzeitig seine Dämpfung erhöht. Der günstigste Abstand betrug 7 cm. (Vgl. Fig. 7.)

Da sowohl das elektrische System als der Resonator leicht abstimmbar war, gestaltete sich die Einstimmung der 3 Systeme — elektrischer Kreis, Platte, Resonator — aufeinander sehr einfach. Nachdem die Telefonplatte auf den gewünschten Ton gebracht war, wurde die Kapazität des elektrischen

Kreises verändert, bis Resonanz zwischen Platte und elektrischem System vorhanden war, man erkennt dies leicht an besonders lautem Ansprechen der Platte. Nun war es leicht, den Resonator, der mit dem Ohr durch ein binaurales Stethoskop verbunden war, durch Veränderung der Öffnung auf den Plattenton einzustimmen.

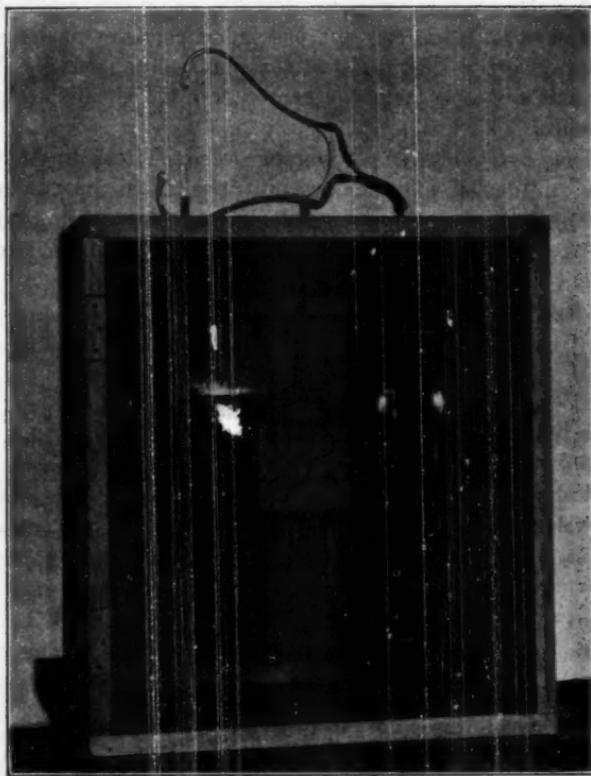


Fig. 8.

Bei dieser Einstimmung leistete ein l. c. beschriebener, rotierender Petroleumkontakt gute Dienste.

Sind alle 3 Systeme aufeinander eingestimmt, so gestatten die Monotelephone eine Maximalintensität vom  $10^8$ fachen Betrag des Schwellenwertes zu erreichen.

## B. Monotelephone für 2048.

Für das Monotelephon 2048 war die schwerfällige Befestigung an einem Bleirahmen nicht nötig. Es genügte, sie zwischen Messingringe einzuspannen und auf einen Holzring aufzuschrauben. Die Membran war wieder eine Wellblechmembran (Durchmesser 3,5 cm, Blechstärke 0,2 mm) mit geeigneter Zentralbeschwerzung. Fig. 9 gibt das Monotelephon im Durchschnitt wieder. Der Eisenkern ( $1 \cdot 1 \cdot 10$  cm, 0,1 mm Transformatorenblech) befindet sich in einer Holzspule, die die Erregerwicklung  $S_2$  trägt. Um möglichst kräftige Wirkungen zu erzielen, sind, wie bei allen anderen Telephonen, die Telefonwindungen direkt auf den Eisenkern aufgewickelt ( $S_1$ , Widerstand  $7 \Omega$ ). Auf die Holzspule ist der Ring mit der Membran  $m$  aufgeschraubt. Der Eisenkern ist straff in die Holzspule eingepaßt. Der Abstand zwischen Membran und Magnet läßt sich durch Verschieben des Eisenkernes regulieren.

Für diesen hohen Ton ist, wie schon bemerkt, die Verwendung von offenen Kugelresonatoren ausgeschlossen, weil diese bei so hohen Tönen wegen zu starker Dämpfung keine reinigende Wirkung mehr besitzen. Es kommen nur geschlossene Resonatoren in Frage.

Man kann diese durch Telephone einfach in der Art erregen, daß man unmittelbar vor eine kleine Öffnung (0,5 cm Durchmesser) des Resonators die Telephonmembran bringt, an einer zweiten Öffnung wird mit dem Stethoskop beobachtet.

Geschlossene Kugelresonatoren mit einem Grundton von ca. 2000 (Durchmesser ca. 10 cm) besitzen nun, wie Versuche zeigten, ebenfalls sehr starke Dämpfung. Es lassen sich aber die viel weniger gedämpften Obertöne eines Resonators mit tieferem Grundton recht gut verwenden.

Hier zeigten sich nun einige Schwierigkeiten. Zunächst läßt sich nicht wie bei den offenen Resonatoren der Resonator bequem auf den Plattenton einstimmen. Es macht sich um-

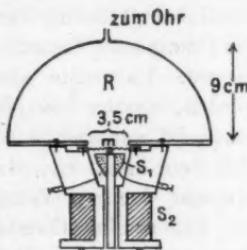


Fig. 9.

gekehrt eine Einstimmung der Platte auf den Resonatorton nötig. Dies kann innerhalb kleiner Intervalle z. B. geschehen durch stärkeres oder schwächeres Einspannen der Platte. Zweitens bringt es die äußerst scharfe Resonanz dieser Ober töne mit sich, daß zwar die Töne sehr schön weich anklingen und verlaufen, daß aber gleichzeitig die Einstimmung äußerst empfindlich gegen Temperaturschwankungen ist.

Erwärmung des Luftresonators durch bloßer Auflegen der Hand bringt sofort Verstimmung hervor. Es erhellte, daß für die Praxis eine derartig empfindliche Resonanz nicht verwendbar ist. Es mußte also ein Oberton des Resonators gesucht werden, dessen Dämpfung einmal klein genug ist, um einen genügend anhaltenden Ton im Ohr zu erzeugen, andererseits nicht so klein ist, daß Temperaturschwankungen innerhalb gewisser Grenzen Verstimmung hervorrufen könnten.

Ein solcher Oberton wurde schließlich im ersten Oberton eines geschlossenen Resonators von 17,8 cm Durchmesser gefunden. Der Grundton dieses Resonators beträgt 1271, der erste Oberton nach Rayleigh<sup>1)</sup> das 1,61fache hiervon, also 2048. Die Ordnung der Kugelfunktion für diesen Oberton ist 2.

Bei normalen Temperaturschwankungen im Zimmer von 13—17° C. zeigte sich keine Änderung der Einstimmung des Resonators. Es machte dieser Punkt allerdings eine Vorschrift nötig über die zu beobachtende Temperatur bei Verwendung des Apparates. Nötigenfalls wird es bei der breiten Resonanz der Telephonplatte genügen, das elektrische System wieder auf den Resonatorton einzustimmen, wenn abnorme Temperaturverhältnisse vorliegen.

Für die anderen Resonatoren (512, 128) sind solche starke Temperaturabhängigkeiten nicht beobachtet worden.

Nun zeigte sich aber bei der Erregung eines jeden Ober tones dieser geschlossenen Kugelresonatoren durch die immerhin verhältnismäßig stark gedämpften Telephontöne, daß stets durch „Stoßerregung“ der Grundton mit erregt wurde. Für die zu verlangende Reinheit des Tones ist dies sehr mißlich. Diese Schwierigkeit läßt sich folgendermaßen umgehen:

Es kann die Luftschnwingung dieses Obertones, die einer

---

1) Lord Raileigh-Neesen, Theorie des Schalles. II. p. 303.

Kugelfunktion zweiter Ordnung entspricht, für den Fall einer einachsigen Kugelfunktion in jeder geschlossenen Halbkugel stattfinden<sup>1)</sup>, denn die Äquatorebene ist eine Knotenfläche.

Verwendet man also eine geschlossene Halbkugel als Resonator, so kann in ihr wohl der 1. Oberton, nicht aber mehr der Grundton entstehen. Auf diese Weise gelang es, das Mitanklingen des Grundtones zu verhindern.

Um einen möglichst großen Effekt zu bekommen, wurde das Telephon direkt an den Resonator angeschraubt (Fig. 9). Es war gleichgültig, ob der Ton im Zentrum oder an der Peripherie der Kugel erregt wurde.

Die Einstimmung der drei Systeme konnte hier nur so erfolgen, daß zunächst das elektrische System in Resonanz mit der Platte gebracht wurde. Dann stimmte man allmählich die Platte auf den Resonatorton ein, der ja auch jedesmal bei Verstimmung mit anklingt, indem dabei immer das elektrische System nachgestimmt wurde, bis maximale Lautstärke eintrat. Irgendwelche Schwierigkeiten sind jedoch auch hier bei der Einstimmung nicht vorhanden.

#### C. Technische Ausführung.

Die drei Monotelephone wurden nebeneinander auf ein Brett montiert und in einem schalldichten Kasten verschlossen. Drei nach außen führende Rohre gestatteten die Stethoskope anzuschließen. Das Monotelephon 512 mußte besonders schallsicher eingepackt werden, da es in starkem Maße auf störende Geräusche anspricht. Ferner erwies es sich als zweckmäßig, den Kasten an Leinenbändern aufzuhängen. Dadurch wurde direkte Schallübertragung durch den Boden usw. vermieden, gegen die besonders das Monotelephon 128 empfindlich war. Für ruhig gelegene Beobachtungszimmer war diese letzte Vorsichtsmaßregel nicht nötig.

Die Zuführung des Schalles vom Resonator zum Ohr geschah wie bei den anderen Resonatoren durch ein Ansatzrohr am Resonator (lichte Weite 5 mm), von dem ein möglichst kurzer, dickwandiger Gummischlauch (Kapillarschlauch) zum Stethoskop führte. Gewöhnliche Gummischläuche absorbieren

1) Lord Rayleigh-Neesen, Theorie des Schalles. II. p. 305.

bei diesen hohen Tönen den Schall sehr stark. Will man längere bewegliche Zuleitungen haben, so verwendet man mehrere kurze, durch Schlauchstücke miteinander verbundene Glas- oder Metallrohre.

In jedem Falle hat man natürlich darauf zu achten, daß die Feststellung des Schwellenwertes für das normale und kranke Ohr unter gleichen Bedingungen stattfindet.

Hier sei bemerkt, daß durch Benutzung des Stethoskops für eindeutige Schallzuführung gesorgt ist. Es kommt nur Luftleitung in Frage. Beim Zuquetschen des Schlauches verschwindet auch der stärkste Ton für das beobachtende Ohr.

### § 3. Die Prüfung der akustischen Stufen mit dem Rayleighschen Scheibchen.

Die Umsetzung der elektrischen Energie in Schallenergie wird in einem Telephon vollzogen. Die für die Anordnung grundlegende Voraussetzung, daß bei dieser Umsetzung das Verhältnis beider Energien konstant bleibt für jede Tonstärke, bedarf einer experimentellen Prüfung. Die Prüfung dieser Frage ist unumgänglich, da die Proportionalität zwischen Strom und Plattenamplitude nur für kleine Exkursionen erwiesen ist, für starke Stromamplituden ist zufolge der magnetischen Eigenschaften des Telephons diese Voraussetzung nicht erfüllt.

Es fragt sich, ob für die bei vorliegendem Apparat auftretenden Maximalströme in den Telephonen die Proportionalität noch erfüllt ist.

Diese Fragen konnten allerdings nicht, wie es erwünscht gewesen wäre, allgemein in bezug auf die elektrischen und akustischen Konstanten des Telephons gelöst werden, es genügte aber vorläufig, an den verwendeten Telephonen die Proportionalität erwiesen zu haben.

Die Frage wurde in der Form gestellt:

Bleibt unter gleichen Verhältnissen die Schallenergie im Telephon proportional der im Primärkreis ausschwingenden Energie? Oder: Ist die Schallenergie proportional dem Quadrat der Ladespannung des Kondensators?

Bei der Untersuchung dieser Frage darf man sich auf die stärksten Intensitäten ( $10^7$ — $10^8$ facher Betrag des Schwellen-

wertes) beschränken. Ist in einem gewissen Intervall die Proportionalität für starke Töne erwiesen, so gilt sie erst recht für schwächere Töne.

Relative Messungen der Schallenergie sind nicht schwierig.

Wegen der äußerst einfachen Apparatur wurde von den mannigfachen Methoden zur relativen Schallstärkemessung die des Rayleighschen Scheibchens gewählt.

Bringt man in den Gang von Luftwellen ein dünnes Scheibchen, so sucht es sich senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Wellen zu stellen.

Das Drehmoment, das das Scheibchen dabei erfährt, ist proportional der Energiedichte der Wellenbewegung.

Die Versuchsanordnung war folgende. Als Scheibchen wurden leichte Spiegelchen (3—5 mm Durchmesser) verwendet, die an sehr feinen Kokonfäden aufgehängt wurden.

Die Spiegel wurden unter  $45^\circ$  gegen die Schallrichtung geneigt unmittelbar vor den Telephonmembranen in einer beiderseits offenen Röhre aufgehängt (Fig. 10).

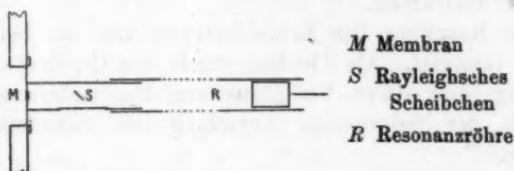


Fig. 10.

Eine wesentliche Vergrößerung des Ausschlags konnte dadurch erzielt werden, daß vor das freie Ende der Röhre passende Resonatoren aufgestellt wurden.

Für das Monotelephon 128 fand der dazu gehörige Luftresonator direkt Verwendung, beim Telephon 512 wurde Resonanz durch einen an die Röhre anschließenden Zylinder mit verschiebbarem Stempel hergestellt. Für den Ton 2048 konnte eine wesentliche Verstärkung durch Resonanz nicht mehr erreicht werden, weil die resonierenden Räume zu klein werden. Um die Empfindlichkeit zu erhöhen, wurde hier ein ganz leichtes, kleines Spiegelchen (2 mm Durchmesser) gewählt, das mit Klebwachs auf einem Papierscheibchen (1 cm Durchmesser) befestigt war. Die Ablesung geschah mit Fernrohr

und Skala. Der Abstand zwischen Spiegel und Skala betrug 1,8 m.

Die Aufstellung mußte sorgfältig durch Einpacken mit Watte usw. vor Luftbewegungen geschützt werden.

Die Schwierigkeit, genügend große Ausschläge zu erzielen, wuchs bei bzw. des Schwellenwertes relativ gleicher Intensität mit zunehmender Schwingungszahl — ein Zeichen, daß für tiefe Töne das menschliche Ohr relativ wesentlich unempfindlicher ist, als für hohe Töne. Ob es freilich gelingt, auf diesem Wege durch gleichzeitige vergleichende Messungen der Schallintensitäten von Tönen verschiedener Höhe mit dem Rayleighschen Scheibchen quantitative Angaben über die absolute Empfindlichkeit des Ohres für Töne zu machen, scheint wegen der komplizierten akustischen Verhältnisse (Resonanzerscheinungen usw. in den Schläuchen, verschiedene starke Absorption usw.) fraglich.

Beobachtet wurden nun unter Variation der Ladespannung des Kondensators die ballistischen Ausschläge des Scheibchens bei jeder Entladung.

Die Resultate der Beobachtungen sind in beiliegenden Kurven vereinigt. Als Abszisse wurde das Quadrat der Ladespannung (bzw. deren Verhältnis zur Maximalspannung), als Ordinate der jedesmalige Ausschlag des Scheibchens aufgetragen.

Für die Monotelephone 512 und 2048 ergaben sich Gerade, d. h. die geforderte Proportionalität ist erfüllt (Fig. 11 und 12).

Bei dem Monotelephon 128 zeigte sich, daß in dem letzten Intervall ( $10^7$ — $10^8$ facher Betrag des Schwellenwertes) die Proportionalität nicht mehr gewahrt ist. Die relativ große Intensität des Tones gestattete aber noch eine Nachprüfung des letzten Intervalles ( $10^6$ — $10^7$ ) mit einem empfindlicheren Scheibchen. Hier konnte die Proportionalität durch den Versuch erwiesen werden (Fig. 13).

Bis zur  $10^{7.3}$ fachen Intensität des Schwellenwertes gilt jedenfalls auch für den tiefsten Ton strenge Proportionalität zwischen Schall- und elektrischer Energie; die dann folgende Abweichung darf für vorliegende Zwecke als unwesentliche bezeichnet werden.

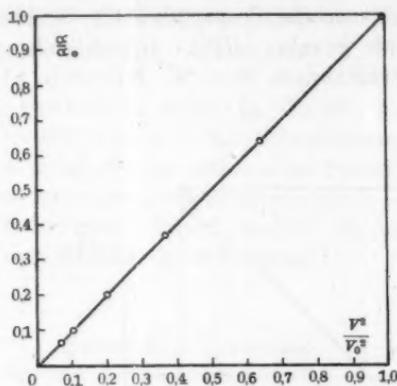


Fig. 11.

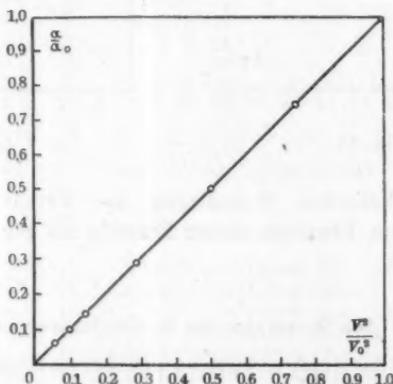


Fig. 12.

Fig. 14 gibt den Zusammenhang zwischen akustischer und elektrischer Energie über den ganzen Intensitätsbereich des Monotelephons 128 wieder. Es sind, wie in Fig. 13, die Logarithmen der Energien und Ausschläge aufgetragen (Schwellenwert gleich 1) der Zusammenhang ist, wie man sieht, bis auf einen zu vernachlässigenden Teil im letzten Intervall ein linearer.

Überraschend bleibt es immerhin, daß selbst noch für so starke Ströme (die Anfangsamplitude für 128 betrug 0,35 Amp.)

bei den Telephonen die Proportionalität zwischen Strom und Plattenamplitude gewahrt bleibt. Jedoch steht dies durchaus mit den Untersuchungen von W. Kunze (l. c.) in Übereinstimmung.

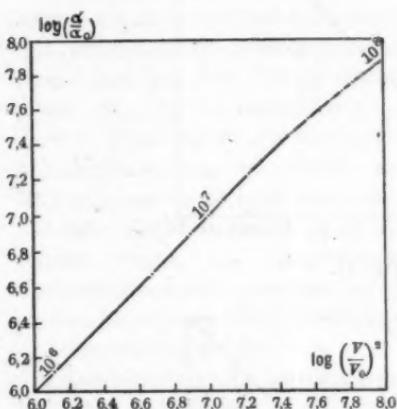


Fig. 13.

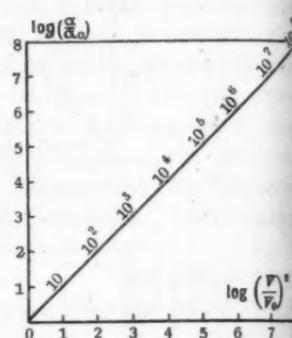


Fig. 14.

Die physikalischen Grundlagen der Versuchsanordnung dürfen nach dem Ergebnis dieser Prüfung als einwandfrei betrachtet werden.

#### § 4. Die Konstanz des Schwellenwertes.

Systematische Gehörprüfungen mit der beschriebenen Versuchsanordnung sollen von anderer berufener Seite ausgeführt werden.

Es wurde vorläufig zuerst noch die wichtige Frage geprüft, ob die Einstellung am Apparat für die Schwellenwerte normaler und kranker Ohren zu verschiedenen Zeiten konstant bleibt.

Aus dem Beobachtungsmaterial seien einige Zahlen herausgegriffen und mitgeteilt. Sie sind in folgender Tabelle enthalten und geben die Schwellenwerte in Skalenteilen der Koppelungsskala usw. bei normalhörigen und kranken Beobachtern zu verschiedenen Zeiten wieder.

Zur Erläuterung sei folgendes gegeben. Die Zahlen bedeuten den Logarithmus des Verhältnisses  $\frac{\text{Maximalintensität}}{\text{Schwellenwert}}$ .

Für einen Beobachter weist die Tabelle eine für diese Zwecke ausreichende Konstanz des Schwellenwertes auf. Es macht sich also überdies eine jedesmalige Einstellung bei der Prüfung auf den normalen Schwellenwert nicht nötig. Dieser Wert kann auf der Skala fixiert werden. Es wird aber gut sein, ihn von Zeit zu Zeit zu überprüfen.

Normalhörige Beobachter.

Nr.	Datum	Zeit	Name	2048	512	128	
1	12. Febr.	4 N.	B.	9,5	9,9	7,8	
2	16. "	9 "	B.	9,5	9,7	8,9	
3	17. "	3 "	B.	9,7	9,7	8,8	
4	18. "	8 "	B.	9,6	9,7	8,6	
5	19. "	8 V.	B.	9,7	9,7	8,9	
6	5. April	8 "	B.	9,7	9,6	9,0	
7	17. Febr.	10 N.	D.	9,0	9,5	8,8	
8	17. "	10 "	K.	9,8	8,6	8,7	
9	5. April	10 V.	W.	8,8	7,8	6,0	7jähr. Knabe

Kranke Beobachter.

10	21. Febr.	8 V.	H.	6,0	6,0	4,2	linkes Ohr
11	1. März	3 N.	H.	9,5	9,0	7,6	beide Ohren
12	1. "	3 "	H.	6,2	6,5	4,5	linkes Ohr
13	27. "	4 "	H.	9,3	8,8	7,8	beide Ohren
14	27. "	4 "	H.	5,9	5,8	4,5	linkes Ohr
15	27. "	4 "	H.	9,2	8,9	7,9	rechtes Ohr
16	18. Febr.	8 V.	O.	8,5	8,1	7,7	gibt an, gut zu hören
17	19. "	8 "	O.	8,6	8,2	8,5	gibt an, schlecht zu hören!!
18	20. "	8 "	O.	8,5	8,5	8,4	
19	24. März	11 V.	O.	8,4	8,0	7,9	
20	25. "	12 "	M.	5,8	4,1	5,6	beide Ohren
21	25. "	12 "	M.	4,6	4,1	5,2	linkes Ohr
22	25. "	12 "	M.	5,1	3,8	4,6	rechtes Ohr
23	5. April	10 "	G.	4,5	8,0	7,5	Mittelohrentzündung

Um die Zahlen zu illustrieren, sei die relative Hörschärfe des kranken Beobachters H., linkes Ohr, für den Ton 128 berechnet. Im Mittel beträgt hier die Einstellung 4,4 —. Die

Differenz mit der entsprechenden Zahl für den Normalhörigen 8,9 gibt

$$8,9 - 4,4 = 4,5.$$

Dies ist also der Logarithmus des Verhältnisses  
Schwellenwert krank  
Schwellenwert normal.

Der Numerus von  $\log 4,5$  ist 3100. Die Hörschärfe des Kranken für den Ton 128 beträgt also nur  $1/_{3100}$  der des normalhörigen, d. h. ein eben hörbarer Ton müßte beim Kranken 3100 mal größere Energie besitzen als beim Normalhörigen.

#### Zusammenfassung.

Es wird eine Versuchsanordnung beschrieben, die zur Untersuchung der Hörschärfe von kranken und normalen Ohren dient. Als Tonquellen dienen *Monotelephone*, die mit den gedämpften Wechselströmen von Kondensatorenentladungen beschickt werden. Die Töne werden durch Platten- und Luftresonanz gereinigt, und ihre Intensität bis zum Minimum perceptibile des Ohres auf elektrischem Wege in bekanntes Verhältnis geschwächt. Das Verhältnis der Schwellenwerte für das kranke und das normale Ohr dient als Maß für die Hörschärfe. Mit dem Rayleighschen Scheibchen wird die Richtigkeit der akustischen Stufen geprüft.

(Eingegangen 27. Dezember 1915.)

e usw.

örigen

tnisses

fe des  
er des  
beim  
ormal.

e zur  
Ohren  
n ge-  
a be-  
Luft-  
imum  
antem  
werte  
r die  
l die



*F. Wadley.*

geboren am 9. März 1846

